Examen du 20 décembre 2013 : 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.
On accordera une grande importance à la rédaction, en particulier tous les arguments utiles doivent être donnés.

Exercice 1.— Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle de vie des solutions :

$$(1) \qquad y' = 3y + e^x.$$

Exercice 2.— On considère l'équation différentielle

$$(2) \qquad y' = -2y^2.$$

1. Montrer que toute solution maximale différente de la fonction nulle ne s'annule jamais.

2. Résoudre (2) et donner toutes les solutions maximales.

3. Déterminer la solution maximale de (2) vérifiant la condition initiale $y(2) = 1$ en précisant son intervalle de vie.

Exercice 3.— On considère l'équation différentielle

$$(3) \quad y' = \frac{x-y}{x+y}.$$

1. Que vaut la pente du champ de tangentes au point (x, y) (quand le champ de tangentes est défini) ? Déterminer l'ensemble E des points (x, y) du plan où le champ de tangentes de (3) n'est pas défini. Déterminer l'ensemble des points du plan où la pente du champ de tangentes est nulle, strictement positive, strictement négative. Faire un dessin représentant ces ensembles et tracer l'allure du champ de tangentes.

2. Esquisser l'allure de la solution de (3) dont le graphe passe par $(1, 1)$ (on ne demande pas de dessiner le graphe de la fonction de façon précise).

Exercice 4.— On considère l'équation différentielle

$$(4) \qquad y' = y(3 + (\sin y)^2 + e^x).$$

1. Soit f une solution maximale de (4), d'intervalle de vie I. Montrer que f vérifie :

$$\forall x \in I, f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \forall x \in I, f(x) > 0 \quad \text{ou} \quad \forall x \in I, f(x) < 0.$$

2. Montrer que, si g est une solution de l'équation différentielle $y' = 3y$ et que g est strictement positive sur son intervalle de définition, alors g est une sous-solution (c'est-à-dire que son graphe est une barrière montante).

3. Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y$. Pour cette équation, déterminer la solution maximale g_2 telle que $g_2(0) = 2$. Préciser la valeur de la limite de g_2 en $-\infty$.

4. Soit f la solution maximale de (4) vérifiant $f(0) = 1$, et soit $]a, b[$ son intervalle de vie (a, b peuvent être réels ou valoir $\pm\infty$). Déduire des questions précédentes que

$$\forall x \in]a, 0], \ 0 < f(x) < g_2(x).$$

5. En déduire que $a = -\infty$ et que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Exercice 5.— On considère l'équation différentielle

$$(5) \qquad y' = \sin(y).$$

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction constante $f_a \colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a \end{array}$.

Déterminer tous les $a \in \mathbb{R}$ tels que f_a est solution de (5).

2. Soit f une solution maximale de (5) qui n'est pas une fonction constante ; on appelle I son intervalle de vie. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad k\pi < f(x) < (k+1)\pi.$$

En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f est strictement monotone (c'est-à-dire strictement croissante ou strictement décroissante).

3. (question bonus)

Le reste du sujet est noté sur 20, cette question peut donner des points supplémentaires. Attention, cette question est plus difficile que les précédentes, ne la faites que si vous avez fait tous les exercices précédents.

On considère la fonction

$$G \colon \begin{array}{ccc}]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left[\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] \end{array}$$

a) Montrer que G est une primitive de $\dfrac{1}{\sin(x)}$ sur l'intervalle $]0, \pi[$.

b) Soit f une solution maximale de (5) vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < f(x) < \pi$. En résolvant (5) par la méthode de séparation des variables, donner une formule pour $G(f(x))$. Soit f_0 la solution maximale de (5) vérifiant $f_0(0) = \pi/2$. En déduire l'expression de f_0.

rappels de trigonométrie pouvant être utiles pour la question 3 :
$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$, $\tan(\pi/4) = 1$.

Barème indicatif : 2,5 – 3 – 4 – 6 – 4,5 — bonus : 2