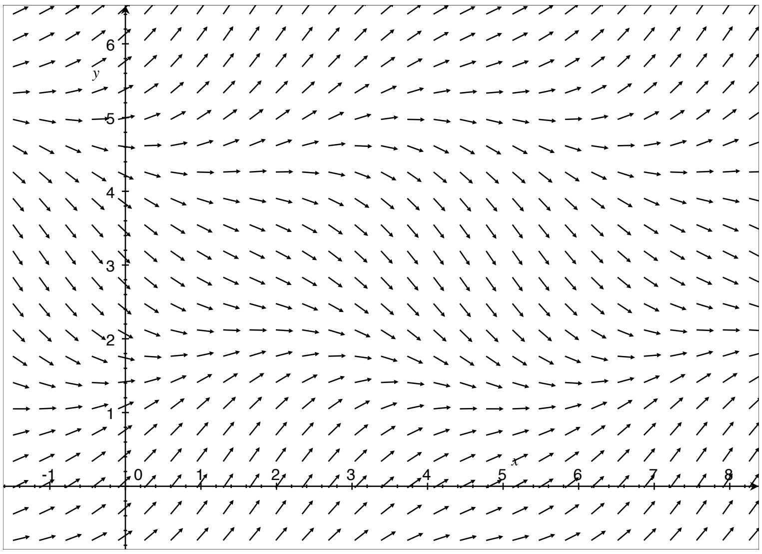
Feuille d'Exercices 5

Étude qualitative : barrières et explosion

Exercice 5.1.— Barrières horizontales et non-explosion des solutions.
On considère l'équation différentielle

$$y' = \cos(y) + \frac{1}{2}\sin(x)$$

dont le champ de tangentes est représenté sur le dessin.



1. À l'aide du dessin, trouver au moins une droite horizontale qui est une barrière montante. Vérifier par le calcul. Même question pour une barrière descendante.
(Pour des calculs sans calculatrice, on peut privilégier des constantes donnant des valeurs connues pour cos *; pour les repérer sur le dessin, se souvenir que* $\pi \simeq 3$*).*

2. Soit f la solution maximale vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$. On note $]a, b[$ son intervalle de vie (a, b réels ou $\pm\infty$). En utilisant les barrières $f_0(x) = 0$ et $g_0(x) = \pi$, montrer que $\forall x \in [0, b[$, $0 \leq f(x) \leq \pi$. Puis montrer que $\forall x \in]a, 0[$, $-\pi \leq f(x) \leq 0$.

3. Montrer que toute solution est bornée et définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.2.— Non-explosion des solutions.
On considère l'équation différentielle

$$y' = y^2 - x.$$

1. Déterminer les trois régions du plan où le champ de tangentes a une pente nulle, strictement positive, strictement négative. Faire un dessin. En déduire une barrière descendante et une barrière montante, définies sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de la région où la pente du champ est strictement négative, et f la solution maximale vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$, c'est-à-dire dont le graphe passe par le point M_0. Montrer que f n'explose pas en temps fini, c'est-à-dire que f est définie (au moins) sur $[x_0, +\infty[$.

Exercice 5.3.— Barrières et limite en $+\infty$ des solutions.
On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = -y - \frac{y}{x}$$

sur l'intervalle $x \in]0, +\infty[$. On remarque que la fonction nulle est solution.

1. Montrer que, si g est une solution strictement positive de l'équation différentielle $y' = -y$, alors le graphe de g est une barrière descendante pour l'équation différentielle (1). Montrer de même que, si h est une solution strictement négative de $y' = -y$, alors le graphe de h est une barrière montante pour l'équation différentielle (1).

2. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' = -y$?

3. Soit f la solution maximale de l'équation différentielle (1) de condition initiale $f(x_0) = y_0$. En utilisant les deux premières questions, montrer que f est définie (au moins) sur $[x_0, +\infty[$, et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *(on pourra considérer deux cas selon le signe de y_0).*

Exercice 5.4.— Barrières et limite en $+\infty$ des solutions.
Même exercice que le précédent avec l'équation $y' = -y^3 - \frac{y}{x}$.

Exercice 5.5.— Barrières et divergence des solutions.
On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = \frac{1}{2}\cos(y) - x.$$

1. Soit g une solution maximale de l'équation différentielle $y' = 1 - x$. Montrer que le graphe de g est une barrière descendante pour l'équation différentielle (1).

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = 1 - x$.

3. Soit f une solution maximale de l'équation différentielle (1) d'intervalle de vie $I =]a, b[$ (avec a et b éventuellement infinis). En utilisant les questions précédentes, montrer que $\lim_{x\to b-} f(x) = -\infty$ (on distinguera les cas $b < +\infty$ et $b = +\infty$).

Exercice 5.6.— Barrières et explosion en temps fini.
On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = e^y + x.$$

Soit $y_0 \in \mathbb{R}$, et soit f la solution de (1) vérifiant la condition initiale $f(1) = y_0$. On voudrait montrer que f "explose en temps fini", c'est-à-dire que l'intervalle de vie de f est du type $I =]a, b[$ avec b fini, et qu'on a $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.

1. Déterminer la solution g de l'équation différentielle $y' = e^y$ avec la condition initiale $y(1) = y_0$. Quel est son intervalle de vie ? Tracer grossièrement son graphe.

2. Montrer que le graphe de g est une barrière montante sur l'intervalle $x \in]0, +\infty[$ pour l'équation différentielle (1). Conclure.

Exercice 5.7.— Barrières et explosion en temps fini. On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = y^2 + x^2 + 1.$$

1. Soit f_1 la solution de (1) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$. On voudrait montrer que f_1 "explose en temps fini", c'est-à-dire que l'intervalle de vie de f_1 est du type $I =]a, b[$ avec b fini et que $\lim_{x\to b-} f_1(x) = +\infty$.

a) On considère une solution maximale g de l'équation différentielle

$$(2) \qquad y' = y^2.$$

Montrer que le graphe de g est une barrière montante pour l'équation différentielle (1).

b) Trouver la solution de (2) qui vérifie la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$. Quel est son intervalle de vie ? Tracer son graphe.

c) En déduire l'explosion de f_1.

2. (question optionnelle) On considère maintenant la solution f_{-1} de l'équation différentielle (1) vérifiant $y(0) = -1$. On voudrait montrer que f_{-1} explose aussi.

a) Montrer que, si h est une solution de l'équation différentielle

$$(3) \qquad y' = x^2$$

alors le graphe de h est une barrière montante pour l'équation différentielle (1). Trouver la solution de (3) vérifiant $y(0) = -2$. En déduire qu'il existe x tel que $f_{-1}(x) > 0$.

b) En utilisant la méthode de la question 1, en déduire l'explosion de f_{-1}.

Exercice 5.8.— Barrières et divergence des solutions On considère l'équation différentielle suivante, définie pour $y > 0$:

$$(1) \qquad y' = \frac{x^2}{y} + 1.$$

1. Soit f une solution de (1) vérifiant la condition initiale $f(2) = 1$. Montrer que f est croissante sur son intervalle de définition.

2. Déterminer l'ensemble des points (x, y) en lesquels la pente du champ de tangentes vaut 2. Tracer cet ensemble. En déduire une fonction h dont le graphe est une barrière descendante.

3. Montrer que f est définie (au moins) sur $[2, +\infty[$.

4. Soit g une solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{x^2}{y}$ (définie pour $y > 0$). Montrer que le graphe de g est une barrière montante pour (1). En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$.

Exercice 5.9.— Non-extinction de population On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = (2 - \cos(x))y - y^2$$

pouvant représenter l'évolution d'une population animale avec un taux de fécondité qui varie annuellement.

1. Dessiner les trois régions du plan où la pente du champ de tangentes de (1) est nulle, strictement positive, strictement négative.

2. Montrer que toute droite horizontale d'équation $y = k$ avec $k > 3$ est le graphe d'une sur-solution.

3. Montrer que toute droite horizontale d'équation $y = k$ avec $0 < k < 1$ est le graphe d'une sous-solution.

4. Soit f une solution avec une condition initiale $f(0) > 0$. Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.

5. Soit f la solution vérifiant la condition initiale $f(0) = 0,1$ (population initiale très faible). On voudrait montrer qu'il existe un moment où la population devient supérieure à $0,9$.

6. Montrer que la population est toujours supérieure à $0,1$.

a) On pose $\varphi(x, y) = (2 - \cos(x))y - y^2$. Montrer que, pour tout (x, y) dans la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0,1 < y < 0,9\}$, on a $\varphi(x, y) \geq 0,1 - 0,01 = 0,09$.

b) On raisonne par l'absurde en supposant que la population reste toujours inférieure à $0,9$. Montrer que $f'(x) \geq 0,09$ pour tout $x \geq 0$. En déduire que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Conclure.