Feuille d'Exercices 2
Primitives

Exercice 2.1.—

1. Trouver toutes les primitives de la fonction $f(x) = x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des primitives de $x + 1$?

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1 \qquad G(x) = \frac{x^2}{2} + x + x \qquad H(x) = \frac{x^2}{2} + x + \pi.$$

3. Résoudre l'équation différentielle $y' = x + 1$ avec la condition initiale $y(2) = 1$.

Exercice 2.2.— Trouver toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^*$ et qui vérifient $f' = 0$ sur $\mathbb{R}^*$ (faire attention au domaine de définition !).

Exercice 2.3.— (Quelques primitives classiques)

1. Donner une primitive de $x \mapsto \sin(x)$, puis de $x \mapsto \cos(x)$, puis de $x \mapsto \exp(x)$.

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$. Donner une primitive de $f(x) = x^n$. Préciser le domaine de définition de f selon le signe de n.

3. Donner les primitives de la fonction $x \mapsto x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, puis sur $]-\infty, 0[$.
En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 2.4.— Soit $x \mapsto u(x)$ une fonction dérivable.

1. **a)** Rappeler la formule pour la dérivée de la fonction $x \mapsto u(x)^2$.
b) En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

2. Donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
a) u^3 ;
b) $\dfrac{1}{u}$ (si u ne s'annule pas) ;
c) $\ln(u)$ (si u ne prend que des valeurs > 0, c'est-à-dire : pour tout x, $u(x) > 0$) ;
d) $\ln(-u)$ (si u ne prend que des valeurs < 0).

3. En déduire les primitives des fonctions $u'u^2$, $\dfrac{u'}{u^2}$, $\dfrac{u'}{u}$.

4. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

* **Exercice 2.5.**— On rappelle la notation $x^a = e^{a \ln x}$ (pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, +\infty[$).

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f(x) = x^a$ définie sur $]0, +\infty[$. Donner la dérivée de f.

2. En déduire que, quand $a \neq -1$, la fonction $F(x) = \dfrac{1}{a+1}\ x^{a+1}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Remarque : comparer cette formule avec celle de l'exercice 2.3.

Exercice 2.6.—

1. Trouver des réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1}.$$

2. En déduire les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

Exercice 2.7.—

1. Trouver les primitives de $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Même question sur l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Exercice 2.8.—

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' = 1$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = \tan(x)$ avec la condition initiale $y(\pi) = 1$.

3. Résoudre l'équation différentielle $y'' = \cos(x)$.

---

* **Exercice 2.9.**— On rappelle qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est

- *paire* si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ (*exemple :* $f(x) = x^2$),
- *impaire* si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ (*exemple :* $f(x) = x^3$),
- *périodique* s'il existe un réel $T > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + T) = f(x)$ (*exemple :* $f(x) = \sin(x)$ *avec* $T = 2\pi$).

Pour chacune des questions suivantes, répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse (si c'est faux, donner un contre-exemple ; si c'est vrai, donner une preuve).

1. Toute primitive d'une fonction continue paire est impaire.

2. Toute primitive d'une fonction continue impaire est paire.

3. Toute primitive d'une fonction continue périodique est périodique.