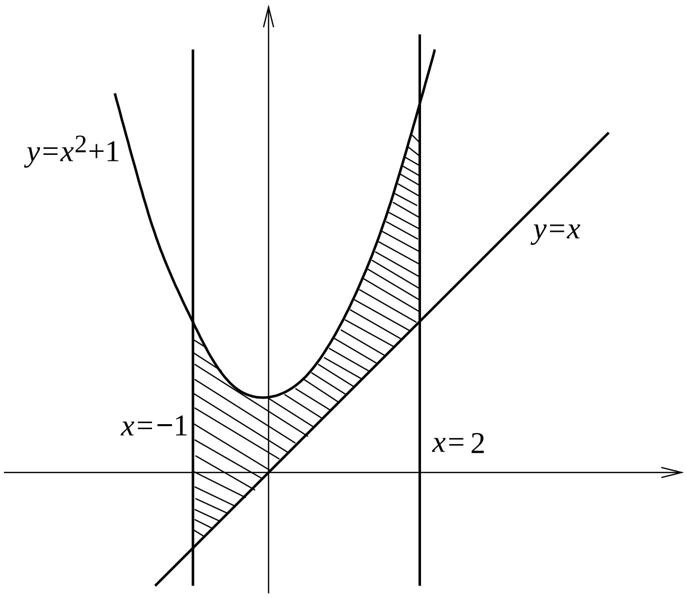
Examen du 6 septembre 2005

Durée : 3 heures

Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1.
Calculer l'aire suivante :



Exercice 2.
a) Calculer les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{-2}{x(x^2-1)}$ en précisant sur quels intervalles elles sont définies.
b) On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x(x^2-1)y' + 2y = x$$

Déterminer les solutions de (E) définies sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3.
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - y' - 6y = \cos(2x)$$

Exercice 4.

Soit E le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{R})$ formé des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a+b+c+d = 0$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

b) Donner une base et la dimension de E.

c) Soit F le sous-espace vectoriel des matrices M de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que E et F sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5.

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 2)$ et $u_3 = (1, -5, 4)$.

a) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par ces trois vecteurs : $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Donner une base de F, sa dimension et un système d'équations de F.

b) Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$. Calculer une base et la dimension de $F \cap G$. Déterminer la dimension de $F + G$.

Exercice 6.

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x - y, x + y + 2z, y + z).$$

a) Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Quelle est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$? Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

d) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Barème approximatif : 2 – 3,5 – 3,5 – 3 – 4 – 4