
Feuille n° 3

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire lesquelles des matrices $A + B$, AB , BA sont définies et calculer celles qui le sont.

Exercice 2. On considère les deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A + B$, $(A + B)^2$, A^2 , B^2 , AB et BA . En déduire que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 3. À quelle condition sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a-t-on $AB = BA$ pour toutes les matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$?

Indication : on pourra utiliser $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x + y + 3z = 3 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \\ 3x - z + t = -3 \\ 2x - y - 3t = 2 \\ 2x - y + z - t = 1 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 2 \\ 4y + 2z = 3 \end{cases} \quad (S_4) \begin{cases} x - y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 2 \\ 4y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} x - 2y + z - 4t = 1 \\ x + 3y + 7z + 2t = 2 \\ x - 12y - 11z - 16t = 3 \end{cases}$$

Exercice 5. Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x, y, z , en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α :

$$(S_6) \begin{cases} \alpha x + y + \alpha z = 2\alpha \\ \alpha x - \alpha y + z = 2\alpha \\ \alpha x - \alpha y + \alpha z = 1 + \alpha \end{cases} \quad (S_7) \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + (1 + \alpha)z = 1 \\ x + y - \alpha^2 z = \alpha^3 \end{cases}$$

$$(S_8) \begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

Exercice 6. Discuter et résoudre le système linéaire suivant, où a et b sont des paramètres réels :

$$(S_9) \begin{cases} 2x + y + 3z + t = a \\ 4x + 3y + 7z + t = b \\ x + 2y + 3z - t = 6 - a \\ 3x - 2y + z + 5t = 2 - 7b \end{cases}$$

Exercice 7. Calculer les matrices inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.

a) Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on introduit la matrice $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Calculer $A\tilde{A}$ et $\tilde{A}A$. En déduire la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 inversible.

b) Application : calculer les inverses des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 1 + xy \end{pmatrix}.$$