Mathématiques

Devoir 1

A rendre la semaine du 14 février.

Exercice 1 Pour tout entier $n \geq 0$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

a) Justifier que pour tout entier $n \geq 0$, I_n existe.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $I_n \geq 0$ et $I_{n+1} \leq I_n$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
Expliciter I_n.

d) Exprimer $\int_0^1 (x^2-1)^n dx$ en fonction de I_{2n+1}.
Indication: On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \cos(x)$.

Exercice 2

a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{4X}{(1+X)^2(1+X^2)}$$

b) Soit f la fonction qui à x associe

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+\sin x}$$

Montrer que f est définie continue sur $I =]-\pi/2, \pi[$.

c) Calculer les primitives de f sur I.
Indication: On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan(\frac{x}{2})$.