Examen de Mathématiques

Durée 3 heures. Documents et calculatrices interdits

Le 14 juin 2004

Question de cours

Donner la preuve du théorème suivant: Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application linéaire de E dans F. Alors f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Exercice 1.

On rappelle que $\mathbb{R}_3[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

1. Donner une base et la dimension de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (X^3+1, X^3-1, X^2+X, X^2-X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Calculer les coordonnées du polynôme X^3+2X+1 dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f(x,y,z) = (6x-2y+2z, 10x-3y+4z, -2x+y).$$

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Ecrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Donner la dimension et une base de $\operatorname{Ker}(f)$. Donner la dimension et une base de $\operatorname{Im}(f)$.
   (c) Déterminer l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{u}$ tels que $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$.
2. Soit $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,-1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,2,0)$ et $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Ecrire la matrice P de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.
   (d) Calculer $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P}$. Pouvait-on prévoir le résultat?

Exercice 3.

Calculer $\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1 \text{ et } 0 \le x \le y^2\}$.

Exercice 4.

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge 0 \text{ et } x^2+y^2 \le 1\}$.

Exercice 5.

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y'' - 6y' + 9y = \alpha \mathrm{e}^{3x}, \qquad (E)$$
où α est un paramètre réel.
2. Pour quelle valeur de α les solutions de (E) forment-elles un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Barème indicatif: 2, 3, 8, 2, 2, 3.