IV. Applications linéaires

1. Définition et propriétés élémentaires

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Définition. Une **application linéaire** de E dans F est une application $f\colon E \to F$ telle que pour tous vecteurs $u, v \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$,
• $f(u+v) = f(u) + f(v)$,
• $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.
Si $F = \mathbb{K}$ on dit que f est une **forme linéaire**. Si $F = E$, f est appelée un **endomorphisme**.

Pour montrer que f est une application linéaire, il suffit de vérifier que
$$f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v) \text{ pour tous } u, v \in E, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Propriétés. Si $f\colon E \to F$ est une application linéaire alors
• $f(\vec{0}) = \vec{0}$,
• $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n)$.

Preuve.
• Soit $\lambda = 0$ et $u \in E$. On a $f(\lambda u) = \lambda f(u)$. Or $\lambda u = \vec{0}_E$ et $\lambda f(u) = \vec{0}_F$, donc $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

• On montre par récurrence sur n la propriété suivante :
$\forall u_1, \ldots, u_n \in E$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n)$.

– Pour $n = 1$ on a $f(\lambda_1 u_1) = \lambda_1 u_1$ par définition.
– On suppose que le résultat est vrai au rang n. On pose $v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ et $w = \lambda_{n+1} u_{n+1}$. Alors $f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1}) = f(v+w) = f(v) + f(w)$. Par hypothèse de récurrence $f(v) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n)$ et par définition $f(w) = \lambda_{n+1} f(u_{n+1})$. Donc
$$f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1}) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_n f(u_n) + \lambda_{n+1} f(u_{n+1}),$$
ce qui est la propriété de récurrence au rang $n+1$.
– Conclusion : la propriété de récurrence est vraie pour tout n.

Exemples.
• Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (2x - 3y, z)$. Si $u = (x,y,z)$, $v = (x', y', z')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ et
$$f(u+\lambda v) = (2(x+\lambda x') - 3(y + \lambda y'), z + \lambda z') = (2x - 3y, z) + \lambda(2x' - 3y', z') = f(u) + \lambda f(v)$$
donc f est une application linéaire.

• Soit θ un réel et $R_\theta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $R_\theta(z) = e^{i\theta} z$. Si $z = \rho e^{i\alpha}$ alors $R_\theta(z) = \rho e^{i(\alpha+\theta)}$: R_θ est la rotation d'angle θ. C'est un endormorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ car si $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $R_\theta(z + \lambda z') = e^{i\theta}(z + \lambda z') = e^{i\theta} z + \lambda e^{i\theta} z' = R_\theta(z) + \lambda R_\theta(z')$.
Remarque. R_θ est aussi un endomorphisme de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

• Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit $\varphi_{x_0}\colon E \to \mathbb{R}$ par $\varphi(f) = f(x_0)$ (évaluation au point x_0). C'est une forme linéaire. car pour toutes fonctions $f, g \in E$ et$\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(x_0) = f(x_0) + \lambda g(x_0) = \varphi(f) + \lambda \varphi(g)$.

Image d'une base.
Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $u_i = f(e_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Soit v un vecteur de E, qu'on décompose dans la base de E : $v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Alors $f(v) = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$.

Propriété. Si E est de dimension finie, une application linéaire est définie de façon unique si on connaît les images des vecteurs d'une base de E.

Réciproquement, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de F. On définit l'application $f\colon E \to F$ par $f(v) = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$ pour tout $v \in E$, où $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de v dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors f est une application linéaire.

Preuve. Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de u et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de v dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors les coordonnées de $u+\lambda v$ sont $(x_1+\lambda y_1, \ldots, x_n+\lambda y_n)$ donc $f(u+\lambda v) = (x_1+\lambda y_1)u_1 + \ldots + (x_n+\lambda y_n)u_n = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n + \lambda(y_1u_1 + \cdots + y_nu_n)$. Donc $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$ et f est une application linéaire.

Cas particulier. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire, alors $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n)$, où $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ sont des scalaires.

Propriété. L'application $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire si et seulement s'il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$.

Exemple. $f(x, y, z) = 17x - \frac{3}{5}y + z$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$.

Composantes.
Définition. Si f est une application de E dans $\mathbb{K}^n$, les **composantes** de f sont les applications $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de E dans $\mathbb{K}$ correspondant aux coordonnées dans $\mathbb{K}$:
pour tout $u \in E$, $f(u) = (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u))$.

Proposition. L'application $f\colon E \to \mathbb{K}$ est linéaire si et seulement si ses composantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des formes linéaires.

Exemple. L'application $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 4t, 17x - y - \frac{1}{3}t)$ est une application linéaire car par ce qui précède $(x, y, z, t) \mapsto x + 2y + 3z + 4t$ et
$(x, y, z, t) \mapsto 17x - y - \frac{1}{3}t$ sont des formes linéaires.

Opérations sur les applications linéaires.
On définit les applications $f + g\colon E \to F$ et $\lambda f\colon E \to F$ par $(f + g)(u) = f(u) + g(u)$ et
$(\lambda f)(u) = \lambda f(u)$ pour tout $u \in E$.

Théorème.
- Si f et g sont des applications linéaires de E dans F et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $f + g$ et λf sont des applications linéaires.
- Si $f\colon E \to F$ et $h\colon F \to G$ sont des applications linéaires alors $h \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Preuve. Soit $u, v \in E$ et $\mu \in \mathbb{K}$.
- L'application $f + g$ va de E dans F. Elle est linéaire car
$(f+g)(u+\mu v) = f(u+\mu v) + g(u+\mu v) = f(u) + \mu f(v) + g(u) + \mu g(v) = (f+g)(u) + \mu(f+g)(v)$.
- Comme f va de E dans F et que h va de F dans H, l'application $h \circ f$ est bien définie et va de E dans G. Notons $u' = f(u)$ et $v' = f(v)$. L'application $h \circ f$ est linéaire car
$h \circ f(u + \mu v) = h(f(u) + \mu f(v)) = h(u' + \mu v') = h(u') + \mu h(v') = h \circ f(u) + \mu h \circ f(v)$.

2. Applications linéaires particulières

L'application **identité de E** est notée Id_E ; elle est définie par $\mathrm{Id}_E(u) = u$ pour tout $u \in E$. C'est une application linéaire de E dans E.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'**homothétie de rapport $\boldsymbol{\lambda}$** est l'application linéaire $f\colon E \to E$ définie par $f(u) = \lambda u$ pour tout $u \in E$. On a $f = \lambda \mathrm{Id}_E$.

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E : $E = E_1 \oplus E_2$. On rappelle que tout vecteur $u \in E$ se décompose de façon unique $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$.

Projection.
On définit l'application $p: E \to E$ par $p(u) = u_1$ pour tout $x \in E$. C'est une application linéaire, appelée la **projection sur E_1 parallèlement à E_2**.

Propriété. $p(u) = u \Leftrightarrow u \in E_1$ et $p(u) = \vec{0} \Leftrightarrow u \in E_2$.

Preuve. Soit $u \in E$. On écrit $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$ et on a $p(u) = u_1$. Si $p(u) = u$ alors $u = u_1 \in E_1$. Si $p(u) = \vec{0}$ alors $u_1 = \vec{0}$ et $u = u_2 \in E_2$. Ceci démontre les deux implications $p(u) = u \Rightarrow u \in E_1$ et $p(u) = \vec{0} \Rightarrow u \in E_2$.
Réciproquement, si $u \in E_1$ alors la décomposition de u selon $E_1 \oplus E_2$ est $u + \vec{0}$, donc $p(u) = u$. Si $u \in E_2$ alors la décomposition de u selon $E_1 \oplus E_2$ est $\vec{0} + u$, donc $p(u) = \vec{0}$. Ceci démontre les deux implications $u \in E_1 \Rightarrow p(u)$ et $u \in E_2 \Rightarrow p(u) = \vec{0}$. La preuve est terminée.

Symétrie.
On définit l'application $s: E \to E$ par $s(u) = u_1 - u_2$ pour tout $u \in E$. C'est une application linéaire, appelée la **symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2**.

Propriété. $s(u) = u \Leftrightarrow u \in E_1$ et $s(u) = -u \Leftrightarrow u \in E_2$.

Preuve. La preuve ressemble à la précédente.
Soit $u \in E$. On écrit $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in E_1$ et $u_2 \in E_2$ et on a $s(u) = u_1 - u_2$. Si $s(u) = u$ alors $u_1 + u_2 = u_1 - u_2$ donc $2u_2 = \vec{0}$, donc $u_2 = \vec{0}$ et $u = u_1 \in E_1$. Si $s(u) =_u$ alors $u_1 + u_2 = -(u_1 - u_2)$ donc $2u_1 = \vec{0}$, donc $u_1 = \vec{0}$ et $u = u_2 \in E_2$. On a montré les deux implications "$\Rightarrow$".
Réciproquement, si $u \in E_1$ alors la décomposition de u selon $E_1 \oplus E_2$ est $u + \vec{0}$, donc $s(u) = u$. Si $u \in E_2$ alors la décomposition de u selon $E_1 \oplus E_2$ est $\vec{0} + u$, donc $s(u) = -u$. On a montré les deux implications "$\Leftarrow$." Ceci termine la preuve.

3. Matrice d'une application linéaire

On considère deux espaces vectoriels E et F de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de F.

Définition. Soit $f: E \to F$ une application linéaire. La **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** est la matrice de taille $n \times p$ dont les coefficients de la j-ième colonne sont les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $(e'_1, \ldots, e'_p)$.

Si $F = E$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ alors cette matrice est appelée la **matrice de f dans la base $\mathcal{B}$**.

Quand $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ on utilise souvent les bases canoniques de E et F.

Exemple 1. Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (2x - 3y + z, x + z)$.
Base canonique de $\mathbb{R}^3$: (e_1, e_2, e_3) avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
Base canonique de $\mathbb{R}^2$: (e'_1, e'_2) avec $e'_1 = (1, 0)$ et $e'_2 = (0, 1, 0)$.

On a : $f(e_1) = (2, 1) = 2e'_1 + e'_2$, $f(e_2) = (-3, 0) = -3e'_1 + 0e'_2$, $f(e_3) = (1, 1) = e'_1 + e'_2$,
donc la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple 2. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque. La matrice de l'application identité dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice identité I_n car $\mathrm{Id}_E(e_i) = e_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Exemple 3. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $f(x, y) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$. Soit $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, -1)$, $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$; $\mathcal{B}'$ est aussi une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$f(u_1)=(1,1)=u_1=u_1+0u_2$ et $f(u_2)=(0,0)=0u_1+0u_2$ donc les coordonnées de $f(u_1)$ dans la base (u_1,u_2) sont $(1,0)$ et les coordonnées de $f(u_2)$ dans la base (u_1,u_2) sont $(0,0)$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f est la projection sur $\mathbb{R}u_1$ parallèlement à $\mathbb{R}u_2$ car ces deux applications coïncident sur la base (u_1,u_2). C'est une base adaptée à la projection.

Théorème. Soit $f\colon E\to F$ une application linéaire et soit A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_p)$. Soit u un vecteur de E, on note

$U=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ où $(x_1,\dots,x_n)$ sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et où $(y_1,\dots,y_p)$ sont les coordonnées de $v=f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors $V=AU$.

Preuve.
Soit $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A. Par définition de A, les coefficients de C_i sont les coordonnées de $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$. On a vu dans le chapitre précédent que $AU=x_1C_1+x_2C_2+\dots+x_nC_n$. Donc les coefficients de la matrice colonne AU sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ du vecteur $x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+\dots+x_nf(e_n)$.
Or $u=x_1e_1+\dots+x_ne_n$, donc $f(u)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)+\dots+x_nf(e_n)$, autrement dit $AU=V$.

Exemple. Soit $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z)=(2x-3y+z,x+z)$. Sa matrice dans les bases canoniques est $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc $f(1,2,3)=(-1,4)$. De façon générale, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-3y+z \\ x+z \end{pmatrix}$.

Théorème.
• Soit f et g des applications linéaires de E dans F et $\lambda\in\mathbb{K}$. Si A est la matrice de f et si B est la matrice de g dans les bases $\mathcal{B},\mathcal{B}'$, alors $A+B$ est la matrice de $f+g$ dans ces bases et λA est la matrice de λf.
• Soit $f\colon E\to F$ et $g\colon F\to G$ des applications linéaires. Si A est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ et si B est la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ alors BA est la matrice de $g\circ f$ dans les bases $\mathcal{B},\mathcal{B}''$.

Preuve.
• Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$. On note $A_1,\dots,A_n$ les colonnes de A et $B_1,\dots,B_n$ les colonnes de B. On a $(f+g)(e_i)=f(e_i)+g(e_i)$, donc la i-ième colonne de la matrice de $f+g$ est A_i+B_i. On en déduit que la matrice de $f+g$ dans les bases $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ est $A+B$. De même la matrice de λf est λA car $(\lambda f)(e_i)=\lambda f(e_i)$.
• Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$, $p=\dim F$ et $q=\dim G$. Soit $u\in E$, notons $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$, $(y_1,\dots,y_p)$ les coordonnées de $v=f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$ et $(z_1,\dots,z_q)$ les coordonnées de $g(v)=g\circ f(u)$ dans la base $\mathcal{B}''$. Notons X,Y,Z les matrices colonnes correspondantes. On a vu au théorème précédent que $Y=AX$ et $Z=BY$. On a donc $Z=B(AX)=(BA)X$. Appliquons ce résultat pour $u=e_i$: on a $x_i=1$ et $x_j=0$ si $j\neq 0$ donc la matrice $(BA)X$ est égale à la i-ième colonne de BA. Par définition Z est la matrice des coordonnées de $g\circ f(u)=g\circ f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}''$. Comme $Z=BAX$, on en déduit que les colonnes de la matrice BA sont les coordonnées de $(g\circ f(e_1),\dots,g\circ f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}''$, autrement dit BA est la matrice de $g\circ f$ dans les bases $\mathcal{B},\mathcal{B}''$.

4. Définitions : injection, surjection, bijection, isomorphisme

Définition.
Soit $\varphi: X \to Y$ une application.

– φ est **injective** si deux éléments distincts ont des images distinctes, autrement dit un élément de Y a au plus un antécédent (éventuellement zéro), ou encore : $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$.
(C'est généralement cette dernière propriété qu'on utilise pour montrer l'injectivité.)

– φ est **surjective** si tout point de Y a au moins un antécédent (éventuellement plusieurs), ce qu'on peut écrire $\varphi(X) = Y$.

– φ est **bijective** si elle est injective et surjective, autrement dit tout élément de Y a un et un seul antécédent. Cela signifie exactement que φ est inversible.

Exemple 1.
$e: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective. En effet, si $e^x = e^y$ alors on peut prendre ln de chaque côté (car $e^x > 0$ et $e^y > 0$) et on trouve $x = y$. Mais elle n'est pas surjective car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc par exemple -1 n'a pas d'antécédent (de même que tout point $y \leq 0$).

Exemple 2.
Soit $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x + 3$. φ est injective car si $x + 3 = x' + 3$ alors $x = x'$. φ est surjective car si $y \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(y - 3) = y$. Donc φ est bijective.

Ceci revient à dire que dans l'équation $y = \varphi(x)$ d'inconnue x il y a une et une seule solution x (qui dépend de y). Ici $x = y - 3$ et $\varphi^{-1}(y) = y - 3$.

Définition.
Soit E, F deux espaces vectoriels. Un **isomorphisme** de E sur F est une application linéaire $f: E \to F$ qui est bijective.

Théorème.
Soit E, F deux espaces vectoriels. Si l'application f est un isomorphisme de E sur F alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E

Preuve.
Puisque $f: E \to F$ est une bijection, on sait que $f^{-1}: F \to E$ existe et est une bijection. Il reste à montrer que c'est une application linéaire.
Soit $v, v' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $u = f^{-1}(v)$ et $u' = f^{-1}(v')$, on a $f(u) = v$ et $f(u') = v'$. Comme f est linéaire, on a $f(u + \lambda u') = f(u) + \lambda f(u')$, donc $f(u + \lambda u') = v + \lambda v'$. En prenant f^{-1}, on trouve $u + \lambda u' = f^{-1}(v + \lambda v')$, autrement dit $f^{-1}(v) + \lambda f^{-1}(v') = f^{-1}(v + \lambda v')$, ce qui prouve que f^{-1} est linéaire.

Définition.
On dit que les espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** ou que E est **isomorphe** à F s'il existe un isomorphisme de E sur F.

Exemple.
Soit $f: \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a, b, c, d)$. f est une application linéaire et c'est une bijection, de bijection réciproque $f^{-1}(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^4$ sont isomorphes.

5. Image d'un sous-espace vectoriel, noyau

Dans cette partie, E et F sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f\colon E \to F$ est une application linéaire.

Définition.
Si A est une partie de E, on note $f(A) = \{f(x) \in F \mid x \in A\})$.

Théorème.
Si G est un sous-espace vectoriel de E alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Preuve.
On a $\vec{0} \in G$ et $f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc $\vec{0} \in f(G)$ et $f(G) \neq \emptyset$.
Soit $v, v' \in f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition il existe $u, u' \in G$ tels que $f(u) = v$ et $f(u') = v'$. On a donc $v + \lambda v' = f(u) + \lambda f(u') = f(u + \lambda u')$ car l'application f est linéaire. Or $u + \lambda u' \in G$ car G est un sous-espace vectoriel, donc $v + \lambda v' \in f(G)$. L'ensemble $f(G)$ est donc un sous-espace vectoriel de F.

Définition.
On appelle **image** de f l'ensemble $f(E)$ et on le note $\mathrm{Im} f$. C'est un sous-espace vectoriel de F.

On appelle **noyau** de f l'ensemble des vecteurs $u \in E$ tels que $f(u) = \vec{0}$ et on le note $\mathrm{Ker} f$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve.
Montrons que $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel. On a $f(\vec{0}) = \vec{0}$ donc $\vec{0} \in \mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Ker} f \neq \emptyset$. Soit $u, u' \in \mathrm{Ker} f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par définition $f(u) = \vec{0}$ et $f(u') = \vec{0}$, donc $f(u + \lambda u') = f(u) + \lambda f(u') = \vec{0}$, ce qui implique que $u + \lambda u' \in \mathrm{Ker} f$. On en déduit que $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème.
L'application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Preuve.
Supposons que f est injective. Soit $u \in \mathrm{Ker} f$. On a $f(u) = \vec{0} = f(\vec{0})$, donc par injectivité $u = \vec{0}$. Par conséquent $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$. Soit $u, v \in E$ tels que $f(u) = f(v)$, autrement dit $f(u) - f(v) = \vec{0}$. Comme f est linéaire, on a $f(u) - f(v) = f(u - v) = \vec{0}$, donc $u - v \in \mathrm{Ker} f$. On en déduit que $u - v = \vec{0}$, c'est-à-dire $u = v$. Par conséquent f est injective. Ceci termine la preuve.

Par définition, f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.
On utilise souvent ces résultats sous la forme suivante :

Théorème.
L'application linéaire f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$ et $\mathrm{Im} f = F$.

Théorème.
Soit G un sous-espace vectoriel de E. Si G est engendré par $u_1, \ldots, u_k$ alors $f(G)$ est engendré par $f(u_1), \ldots, f(u_k)$. En particulier $\dim f(G) \leq \dim G$.

Si E est de dimension finie, $\dim \mathrm{Im} f \leq \dim E$. La dimension de $\mathrm{Im} f$ est appelée le **rang** de f.

Preuve.
Comme $u_i \in G$ on a $f(u_i) \in f(G)$. Soit $v \in f(G)$. Par définition il existe $u \in G$ tel que $f(u) = v$. Comme $G = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k$.

Par conséquent, $v = f(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k) = \lambda_1 f(u_1) + \cdots + \lambda_k f(u_k)$. Ceci montre que la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_k))$ engendre $f(G)$.

Si $\dim G = k$, il existe $(u_1, \ldots, u_k)$ une base de G, donc $f(G) = \mathrm{Vect}(f(u_1), \ldots, f(u_k))$ et $\dim f(G) \leq k$.

Exemple.
Il n'existe pas d'application linéaire surjective $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ car $\dim \mathrm{Im} f \leq 2 < \dim \mathbb{R}^3$.

Théorème.
Supposons que E est de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. L'application f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F.

En particulier, si f est un isomorphisme alors $\dim E = \dim F$.

Preuve.
Supposons que f est un isomorphisme et montrons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F. L'application f est surjective donc $\mathrm{Im} f = F$. Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ engendre E, le théorème précédent implique que la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $f(E) = F$.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que $\lambda_1 f(e_1) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = \vec{0}$. Par linéarité, on obtient que $f(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = \vec{0}$, et en prenant f^{-1} on trouve $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \vec{0}$. Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de E, ceci implique que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Par conséquent, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
La famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre et génératrice dans F, donc c'est une base de F.

Réciproquement, supposons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F et montrons que f est un isomorphisme. Le théorème précédent implique que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im} f$; comme c'est une famille génératrice de F, on obtient que $\mathrm{Im} f = F$, autrement dit f est surjective.
Soit $u \in E$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. On a $u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ donc $f(u) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)$, autrement dit $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées de $f(u)$ dans la base $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. Si $f(u) = \vec{0}$ alors les coordonnées de $f(u)$ sont nulles : $x_1 = \cdots = x_n = 0$, donc on a aussi $u = \vec{0}$. Par conséquent, $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$ et par un théorème vuprécédemment f est injective.
L'application linéaire f est surjective et injective, donc c'est un isomorphisme.

Théorème.
Suposons que E et F sont de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Preuve.
Soit $n = \dim E$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Supposons que E et F sont isomorphes : il existe un isomorphisme $f\colon E \to F$. Par le théorème précédent, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de F donc $\dim F = n$.
Réciproquement, supposons que $\dim F = n$. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de F. Nous avons vu qu'on peut définir une application linéaire $f\colon E \to F$ en posant $f(e_i) = u_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Par le théorème précédent, f est un isomorphisme, autrement dit E et F sont isomorphes.

Le théorème suivant s'appelle également *théorème de la dimension* ou *théorème du rang.*

Théorème noyau-image.
Si E est de dimension finie alors

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f.$$

Preuve.
Puisque E est de dimension finie, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker} f$ admet un supplémentaire dans E. Choisissons-en un et appelons-le G. Cela signifie que $E = G + \mathrm{Ker} f$ et $G \cap \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$.

Soit $g\colon G \to \mathrm{Im} f$ l'application définie par $g(u) = f(u)$ pour tout $u \in G$ (c'est une restriction de l'application f). Calculons $\mathrm{Ker}\, g$. Soit $u \in G$ tel que $g(u) = \vec{0}$, autrement dit $f(u) = \vec{0}$. On a donc $u \in G \cap \mathrm{Ker} f$, donc $u = \vec{0}$. Par conséquent $\mathrm{Ker}\, g = \{\vec{0}\}$ donc g est injective.

Soit $v \in \mathrm{Im} f$. Par définition il existe $u \in E$ tel que $f(u) = v$. Puisque $E = G + \mathrm{Ker} f$, il existe $u_1 \in G$ et $u_2 \in \mathrm{Ker} f$ tels que $u = u_1 + u_2$. Alors

$$v = f(u) = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1) + \vec{0} = g(u_1).$$

L'application $g\colon G \to \mathrm{Im} f$ est donc surjective. Par conséquent g est un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im} f$, donc $\dim G = \dim \mathrm{Im} f$. Enfin, puisque $E = \mathrm{Ker} f \oplus G$, on a $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim G$ donc $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$. Ceci conclut la preuve.

Exemple 1.
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ avec $a_1, \ldots, a_n$ sont tous nuls. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $f(e_i) = a_i$. Donc $\mathrm{Im} f \neq \{0\}$. Par conséquent $\dim \mathrm{Im} f \geq 1$ et comme $\mathrm{Im} f$ est inclus dans $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1, on a $\dim \mathrm{Im} f = 1$. Par le théorème noyau-image, on en déduit $\mathrm{Ker} f$ est de dimension $n-1$, autrement dit le sous-espace vectoriel d'équation cartésienne $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ est de dimension $n-1$.

Exemple 2.
Il n'existe pas d'application linéaire injective $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ car $\dim \mathrm{Im} f \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$ et comme $\dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathrm{Im} f$ on a $\dim \mathrm{Ker} f \geq 1$.

Théorème.
Supposons que $\dim E = \dim F$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
– f est injective,
– f est surjective,
– f est un isomorphisme.

En général, il est plus facile de montrer qu'une application est injective (en montrant $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$).

Preuve.
On a les équivalences suivantes :
• f injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = 0$.
• f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = F \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim F \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim E$.

Le théorème noyau-image nous donne que $\dim E = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$ donc on a l'équivalence $\dim \mathrm{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im} f = \dim E$, autrement dit f est injective si et seulement si elle est surjective. Donc, si on suppose que f est injective ou surjective, elle est bijective. Et si on suppose que f est bijective, elle est évidemment injective et surjective.

Exemple.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Cherchons $\mathrm{Ker} f$. $f(x, y) = \vec{0}$ est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +y & = & 0 \\ x & -y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcl} x & +y & = & 0 \\ & -2y & = & 0 \end{array}\right.$$

donc $y = 0$ et $x = 0$. On a montré que $\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$ donc f est un isomorphisme (ici $E = F = \mathbb{R}^2$ donc évidemment $\dim E = \dim F$).

6. Matrice d'une application inversible

Théorème.
Soit E et E' des espaces vectoriels de même dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de E'. Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire et soit A sa matrice dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors l'application f est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible.

De plus, si f est un isomorphisme alors A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Preuve. Supposons que f est un isomorphisme. Soit M la matrice de f^{-1} dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. Par un théorème vu au paragraphe 3, la matrice MA est la matrice de l'application $f^{-1} \circ f$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$. Or $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et la matrice de Id_E dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice identité, donc $MA = I_n$. On a de même $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est AM, donc $AM = I_n$. On en déduit que A est inversible et $M = A^{-1}$.

Réciproquement, supposons que A est inversible. Soit $g\colon F \to E$ l'application linéaire telle que les coordonnées de $g(u'_i)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont les coordonnées de la colonne i de la matrice A^{-1} (on a vu qu'on peut définir une application linéaire en donnant les images des vecteurs d'une base). Autrement dit, A^{-1} est la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. La matrice $A^{-1}A = I_n$ est la matrice de l'application $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$. Or I_n est la matrice de Id_E dans la base $\mathcal{B}$, donc $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (ces deux applications linéaires ont la même matrice, donc elles coïncident sur une base, donc elles sont égales). De même, la matrice $AA^{-1} = I_n$ est la matrice de $f \circ g$ dans la base $\mathcal{B}'$, donc $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. On en déduit que f est inversible et $g = f^{-1}$.

7. Changement de bases

Définition.
Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (u'_1, \ldots, u'_n)$ deux bases de E. La **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice carrée $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la colonne i sont les coordonnées du vecteur u'_i dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple.
Soit $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$, $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ (c'est la base canonique de $\mathbb{R}^2$), $u'_1 = (1, 1)$, $u'_2 = (2, 3)$ et $\mathcal{B}' = (u'_1, u'_2)$; on peut montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a $(1, 0) = 3(1, 1) - (2, 3)$ et $(0, 1) = -2(1, 1) + (2, 3)$, autrement dit $u_1 = 3u'_1 - u'_2$ et $u_2 = -2u'_1 + u'_2$. Donc les coordonnées de u_1 dans $\mathcal{B}'$ sont $(3, -1)$. et les coordonnées de u_2 dans $\mathcal{B}'$ sont $(-2, 1)$. La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est : $P' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriétés des matrices de passage.

Considérons l'application identité $\mathrm{Id}_E\colon E \to E$. On a $\mathrm{Id}_E(u'_i) = u'_i$ donc par définition la matrice de l'application Id_E dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la matrice de passage P. Comme l'application Id_E est un isomorphisme, on en déduit que P est inversible et que P^{-1} est la matrice de l'application $\mathrm{Id}_E^{-1} = \mathrm{Id}_E$ dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. Par conséquent P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Soit $v \in E$. Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$, $(x_1,' \ldots, x'_n)$ les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}'$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$.

On a l'égalité $v = \mathrm{Id}_E(v)$, ce qui se traduit par la relation matricielle $X = PX'$.

Propriétés.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E et soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
• La matrice P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
• Si X représente les coordonnées d'un vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ et si X' représente les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$ alors $X = PX'$.

Attention au piège !
P s'appelle la matrice de passage **de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ à $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$** mais la formule $X = PX'$ donne les coordonnées **dans $\boldsymbol{\mathcal{B}}$** en fonction des coordonnées **dans $\boldsymbol{\mathcal{B}'}$**, et non l'inverse.

Pour avoir les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}$, il faut utiliser la formule $X' = P^{-1}X$.

Formule de changement de bases.

Théorème.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit $f\colon E \to E$ un endomorphisme de E, A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Alors on a la formule de changement de bases suivante :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Preuve. Nous avons déjà vu que P est la matrice de Id_E dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et que P^{-1} est la matrice de Id_E dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$. Par un théorème vu au paragraphe 3, AP est la matrice de $f \circ \mathrm{Id}_E$ dans les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, et de même $P^{-1}(AP)$ est la matrice de $\mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ dans la base $\mathcal{B}'$. Or $\mathrm{Id}_E \circ f \circ \mathrm{Id}_E = f$ donc $P^{-1}AP$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire $P^{-1}AP = A'$. Ceci termine la preuve.

Remarque.
La formule du changement de base a un intérêt théorique mais en pratique on ne l'utilise pas pour calculer A' à partir de A et de P. Pour calculer A', on revient à la définition de la matrice d'une application dans une base.

Exemple.
Cet exemple illustre à quoi peut servir la formule de changement de bases.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (1,3)$. Les vecteurs u_1, u_2 forment une base de $\mathbb{R}^2$ car ils ne sont pas colinéaires (c'est-à-dire ils ne sont pas proportionnels).

On a $f(u_1) = (2,2) = 2u_1$ et $f(u_2) = (1,3) = u_1$ donc la matrice de f dans la base (u_1, u_2) est $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les puissances de A' se calculent facilement par récurrence :
$A'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A'^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$,... et $A'^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geq 1$.

La matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Si on calcule son inverse, on trouve $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A' = P^{-1}AP$ donc $A = PA'P^{-1}$. Calculons les puissances de A en fonction de A' : $A^2 = (PA'P^{-1})(PA'P^{-1}) = PA'^2P^{-1}$, $A^3 = A^2A = (PA'^2P^{-1})(PA'P^{-1}) = PA'^3P^{-1}$,... $A^n = PA'^nP^{-1}$. Si on utilise la formule de A'^n pour calculer le produit PA'^nP^{-1}, on trouve :

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 - 2^n & -1 + 2^n \\ 3 - 3.2^n & -1 + 3.2^n \end{pmatrix} \quad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$