Algèbre linéaire

I. Systèmes linéaires

Dans ce chapitre, on se place soit dans $\mathbb{R}$ soit dans $\mathbb{C}$ et on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un nombre $a \in \mathbb{K}$ sera appelé un **scalaire**.

Un système linéaire de p équations à n inconnues est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \quad (\mathrm{L}1) \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \quad (\mathrm{L}2) \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 & +a_{p2}x_2 & + & \cdots & +a_{pn}x_n & = & b_p \quad (\mathrm{L}p) \end{array}\right.$$

Les nombres x_i, a_{ij} et b_j appartiennent tous à $\mathbb{K}$.

Les inconnues sont $x_1, \ldots, x_n$. Les nombres $b_1, \ldots, b_p$ sont appelés les seconds membres. On cherche la ou les solutions du système.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 1 + 3i \\ 2x - \sqrt{3}z & = & 0 \end{array}\right.$$

Contre-exemple.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 1 \\ xy & = & 2 \end{array}\right.$$

1. Opérations sur les lignes

Dans un système linéaire, on peut effectuer les opérations suivantes sans changer les solutions :

- échanger deux lignes,
- remplacer Li par λLi avec $\lambda \neq 0$,
- remplacer Li par L$i + \lambda$Lj avec $j \neq i$ ($\lambda \in \mathbb{K}$ quelconque).

Toute opération doit être effectuée sur les deux membres de l'équation.

On dit que le nouveau système est équivalent au système de départ.

Attention : les opérations doivent être faites successivement.

Contre-exemple.

$$\left\{\begin{array}{rcll} x + y & = & 2 & (\mathrm{L}1) \\ x - y & = & 0 & (\mathrm{L}2) \end{array}\right.$$

$S = \{(1, 1)\}$.
Une seule solution.

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x & = & 2 & (\mathrm{L}1 + \mathrm{L}2) \\ 2x & = & 2 & (\mathrm{L}2 + \mathrm{L}1) \end{array}\right.$$

$S = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
Infinité de solutions.

2. Méthode du pivot de Gauss

C'est une méthode pour résoudre un système linéaire. Voici les différentes étapes :

• Permuter éventuellement 2 lignes pour que dans la 1ère ligne le coefficient de x_1 soit non nul.

• Pour chaque ligne L$2, \ldots,$ Lp, remplacer la ligne Li par L$i + \lambda_i$L1 où λ_i est choisi pour annuler le coefficient de x_1. On ne touche pas à la ligne L1.

• Répéter les opérations précédentes sur les lignes L$2, \ldots,$ Lp (en éliminant l'inconnue x_2), et ainsi de suite.

On verra plus loin qu'on peut avoir
– des inconnues qui s'éliminent simultanément,
– des équations qui disparaissent ($0 = 0$),
– des équations impossibles (par ex. $0 = 1$).

Exemple 1.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & (\mathrm{L1}) \\ 2x & +2y & +4z & +t & = & 2 & (\mathrm{L2}) \\ -x & -3y & & +2t & = & 2 & (\mathrm{L3}) \\ 3x & +4y & +4z & & = & 0 & (\mathrm{L4}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & (\mathrm{L1}) \\ & & 2z & -t & = & 0 & (\mathrm{L2} \leftarrow \mathrm{L2} - 2\mathrm{L1}) \\ & -2y & +z & +3t & = & 3 & (\mathrm{L3} \leftarrow \mathrm{L3} + \mathrm{L1}) \\ & y & +z & -3t & = & -3 & (\mathrm{L4} \leftarrow \mathrm{L4} - 3\mathrm{L1}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & \\ & y & +z & -3t & = & -3 & (\mathrm{L2} \leftrightarrow \mathrm{L4}) \\ & -2y & +z & +3t & = & 3 & \\ & & 2z & -t & = & 0 & (\mathrm{L4} \leftrightarrow \mathrm{L2}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & \\ & y & +z & -3t & = & -3 & (\mathrm{L2}) \\ & & 3z & -3t & = & -3 & (\mathrm{L3} \leftarrow \mathrm{L3} + 2\mathrm{L2}) \\ & & 2z & -t & = & 0 & (\mathrm{L4}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & \\ & y & +z & -3t & = & -3 & \\ & & z & -t & = & -1 & (\mathrm{L3} \leftarrow \tfrac{1}{3}\mathrm{L3}) \\ & & 2z & -t & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & \\ & y & +z & -3t & = & -3 & \\ & & z & -t & = & -1 & (\mathrm{L3}) \\ & & & t & = & 2 & (\mathrm{L4} \leftarrow \mathrm{L4} - 2\mathrm{L3}) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +y & +z & +t & = & 1 \\ & y & +z & -3t & = & -3 \\ & & z & -t & = & -1 \\ & & & t & = & 2 \end{array}\right.$$

On obtient un **système triangulaire** (voir schéma de droite).

On résout en commençant par la dernière ligne et en remontant :
- $t = 2$,
- $z = -1 + t = 1$,
- $y = -3 - z + 3t = 2$,
- $x = 1 - y - z - t = -4$.

Il y a une solution unique $(-4, 2, 1, 2)$.

Exemple 2.

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & (\mathrm{L1}) \\ 2x & +2y & +3z & +t & = & 2 & (\mathrm{L2}) \\ 2x & +2y & +z & +t & = & 0 & (\mathrm{L3}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & +z & +t & = & 1 & (\mathrm{L1}) \\ & & z & -t & = & 0 & (\mathrm{L2} \leftarrow \mathrm{L2} - 2\mathrm{L1}) \\ & & -z & -t & = & -2 & (\mathrm{L3} \leftarrow \mathrm{L3} - 2\mathrm{L1}) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x & +y & +z & +t & = & 1 & \text{(L1)} \\ & & z & -t & = & 0 & \text{(L2)} \\ & & & -2t & = & -2 & \text{(L3} \leftarrow \text{L3} + \text{L2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x & +y & +z & +t & = & 1 \\ & & z & -t & = & 0 \\ & & & -2t & = & -2 \end{cases}$$

On obtient un **système échelonné** (voir schéma de droite).
x, z, t sont les **inconnues principales** (correspondant aux échelons). On fait passer y à droite et on résout en exprimant les inconnues principales x, z, t en fonction de y.

- $t = 1$,
- $z = t = 1$,
- $x = 1 - y - z - t = -1 - y$.

L'inconnue y peut prendre n'importe quelle valeur $\lambda \in \mathbb{R}$, il y a une infinité de solutions : $S = \{(-1-\lambda, \lambda, 1, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble des solutions dépend d'un paramètre.

Exemple 3.

$$\begin{cases} x & +y & = & 1 & \text{(L1)} \\ x & +2y & = & 2 & \text{(L2)} \\ x & +3y & = & a & \text{(L3)} \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x & +y & = & 1 & \\ & y & = & 1 & \text{(L2} \leftarrow \text{L2} - \text{L1)} \\ & 2y & = & a-1 & \text{(L3} \leftarrow \text{L3} - \text{L1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & = & 1 & \\ & y & = & 1 & \\ & 0 & = & a-3 & \text{(L3} \leftarrow \text{L3} - 2\text{L2)} \end{cases} \qquad \begin{cases} x & +y & = & 1 \\ & y & = & 1 \\ & 0 & = & a-3 \end{cases}$$

Deux cas :
- Si $a = 3$ alors L3 devient $0 = 0$ et **l'équation disparaît**. Le système devient

$$\begin{cases} x & +y & = & 1 \\ & y & = & 1 \end{cases}$$

Il y a une unique solution, qui est $(1, 0)$.

- Si $a \neq 3$ alors L3 est **impossible**. Le système n'a aucune solution.

3. Rang d'un système linéaire

Soit (S) un système linéaire et (S') un système échelonné qui est équivalent à (S).

Le **rang** de (S) est le nombre d'équations de (S') dont la partie gauche est non nulle; c'est aussi le nombre d'inconnues principales (revoir les exemples précédents).

Exemple. Voir les exemples précédents (les rangs sont indiqués).

Remarque. Le rang de (S) ne dépend pas de la façon dont on se ramène à un système échelonné.

Les équations de (S') qui s'écrivent "$0 = \cdots$" donnent des **conditions de compatibilité**.

Remarque. Soit r le rang d'un système linéaire échelonné avec n inconnues. Il y a 3 cas :
- il y a une équation impossible : pas de solution.
- pas d'équation impossible et $r = n$: solution unique (système triangulaire).
- pas d'équation impossible et $r < n$: l'ensemble des solutions dépend de $n - r$ paramètres (les r inconnues principales sont exprimées en fonction des $n - r$ autres inconnues).

II. Matrices

1. Définitions

Une **matrice** $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes, qu'on note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Le premier indice (i) désigne la ligne, le deuxième (j) la colonne.

On note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices $n \times p$. Les matrices sont égales si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous i, j, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$.

Soit A une matrice $n \times p$.

– Si $p = 1$, A est une **matrice colonne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

– Si $n = 1$, A est une **matrice ligne** : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$

– Si $n = p$, A est une **matrice carrée**. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$.

Matrices particulières.

La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle**. Elle est notée (0) ou 0.

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de taille n. Les coefficients a_{ii} sont dits **diagonaux**.
– Si $a_{ij} = 0$ dès que $i \neq j$, A est appelée une matrice **diagonale**.
– Si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$, A est appelée une matrice **triangulaire supérieure**.
– Si $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$, A est appelée une matrice **triangulaire inférieure**.

Exemple.
Matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Matrice diagonale : $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$.

2. Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices de même taille.

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices $n \times p$, on définit $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Multiplication d'une matrice par un scalaire.

Si $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, on définit λA comme étant la matrice $C=(c_{ij})\in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ pour tous i,j.

Exemple. Si $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $2A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Produit de deux matrices.

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ et $B=(b_{jk})_{\substack{1\le j\le p\\ 1\le k\le q}}$. On définit le produit $A\times B$ (aussi noté AB) comme étant la matrice $C=(c_{ik})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le q}}$ définie par

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk} \text{ pour } 1\le i\le n, 1\le k\le q.$$

Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Présentation du calcul.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

Produit de matrices et systèmes linéaires

Exemple 1.

$$(S)\left\{\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & b_2 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$

La matrice des coefficients du système est $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Notons $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Alors $MX=\begin{pmatrix} x_1 & +2x_2 & -x_3 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 \end{pmatrix}$

Et le système (S) peut s'écrire $MX=B$.

Exemple 2. Notons $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

Sous forme matricielle, les systèmes $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax+by \\ y' & = & cx+dy \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & a'x'+b'y' \\ y'' & = & c'x'+d'y' \end{array}\right.$ s'écrivent $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Exprimons x'' et y'' en fonction de x et y : $\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & (a'a+b'c)x+(a'b+b'd)y \\ y'' & = & (c'a+d'c)x+(c'b+d'd)y \end{array}\right.$

Or $A'A = \begin{pmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A'A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Le produit de matrices a été défini de façon à correspondre naturellement aux systèmes linéaires.

Règles de calcul

Les règles de calcul découlent des propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les opérations se comportent comme on peut s'y attendre, sauf que le produit de deux matrices n'est pas commutatif.

Addition. Soit A, B, C des matrices de même dimension :
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ (associativité),
- $A+B = B+A$ (commutativité),
- $A+(0) = A$ (élément neutre).

Multiplication par un scalaire. Soit A, B de même dimension et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$,
- $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$,
- $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

La matrice $(-1)A$ est notée $-A$. On note $A-B$ pour $A+(-B)$. On a $A-A=(0)$.

Produit de matrices. Soit $A, B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $\lambda(AC) = (\lambda A)C = A(\lambda C)$,
- $(A+B)C = AC+BC$ et $A(C+D) = AC+AD$ (distributivité),
- $A(BC) = (AB)C$ (associativité).

<u>Mais le produit n'est pas commutatif</u> : on n'a pas $AB = BA$ (voir l'exercice 2).
De plus, si $AB=(0)$ il est faux de dire que $A=(0)$ ou $B=(0)$.

Exemple. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Inverse des matrices carrées

Si on se place dans l'ensemble des matrices carrées de taille n, on peut additionner et multiplier n'importe quelles matrices A et B. De plus, toute matrice A a un opposé $-A$. Qu'en est-il pour l'inverse ?

Soit $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

I_n est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent 1. I_n est appelée la **matrice identité**.

I_n est l'élément neutre pour la multiplication : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $I_n A = A I_n = A$.

Définition. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, on dit que la matrice A est **inversible**. On note $A^{-1} = B$ l'inverse de A.

Exemple.
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. $AB = I_3$ et $BA = I_3$, donc $B = A^{-1}$.

Lemme. Si A est inversible, son inverse est unique.

Preuve. *Soit $B_1, B_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$. Alors $(B_2A)B_1 = I_nB_1 = B_1$ et $B_2(AB_1) = B_2I_n = B_2$. Par associativité on trouve $B_1 = B_2$.*

Remarque. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Propriété. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (<u>ordre inversé</u>).

Preuve. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$. *De même* $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. *Donc* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Comme le produit n'est pas commutatif, on demande $AB = I_n$ <u>et</u> $BA = I_n$, et a priori une seule égalité n'est pas suffisante. Pourtant on a le résultat suivant (admis pour l'instant) :

Théorème. Soit $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = I_n$ alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Systèmes linéaires et matrices inverses

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée $n \times n$ et $X = (x_i)$, $Y = (y_i)$ des vecteurs colonnes de taille n. On a vu que $AX = Y$ est l'écriture matricielle du système linéaire de n équations à n inconnues :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\cdots & +a_{nn}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

Si A est inversible, alors $A^{-1}(AX) = A^{-1}Y$, donc $X = A^{-1}Y$. Par conséquent, si on connaît A^{-1} alors on a la solution du système.

Réciproquement, nous allons voir que résoudre un système linéaire permet de calculer l'inverse d'une matrice carrée.

Méthode pour calculer une matrice inverse

On se donne $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à savoir si A est inversible et si oui on veut calculer A^{-1}.

On prend $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ <u>quelconque</u> et on résout le système linéaire $AX = Y$ (où $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) en utilisant le pivot de Gauss. Il y a deux cas :

• Le rang du système est $r < n$ (lignes "$0 = \cdots$"). Pour certains Y, $AX = Y$ n'a pas de solution ou a une infinité de solutions et la matrice A n'est pas inversible.

• Le rang du système est n (système triangulaire). Pour tout Y il existe une unique solution X, et la résolution du système donne une matrice B telle que $AX = Y \iff X = BY$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

On va maintenant montrer que si $AX = Y \iff X = BY$ alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Lemme. Soit $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Si pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on a $AX = BX$ alors $A = B$.

Preuve. *On note $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Soit $1 \leq k \leq n$.*

Si on choisit X tel que $x_k = 1$ et $x_i = 0$ pour $i \neq k$ alors $AX = \begin{pmatrix} a_{k1} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix}$ et $BX = \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix}$.

On a $AX = BX$, donc la k-ième colonne de A est égale à la k-ième colonne de B. Comme c'est vrai pour $k = 1, 2, \ldots, n$, on a $A = B$.

Lemme. Soit $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\forall\, X, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \ AX = Y \iff X = BY$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Preuve. *Soit $Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Par hypothèse, si on pose $X = BY$ alors $AX = Y$, donc $A(BY) = Y$. Autrement dit $\forall\, Y \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \ (AB)Y = Y = I_nY$. Par le lemme précédent on a donc $AB = I_n$.*

De même, soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si on pose $Y = AX$ alors par hypothèse $BAX = BY = X$, donc par le lemme précédent $BA = I_n$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculons A^{-1}.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. L'équation $AX = Y$ équivaut au système :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ \qquad\ \ x_2 = y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 + y_1 = y_2 + y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

On remet les variables dans l'ordre : $\begin{cases} x_1 = 1y_1 + 1y_2 \\ x_2 = 0y_1 + 1y_2 \end{cases}$

Autrement dit $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$. Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Transposée d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$. La **transposée** de A, notée ${}^tA$, est la matrice (b_{ij}) de taille $p \times n$ telle que $b_{ij} = a_{ji}$ pour tous i, j, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$. Autrement dit, ${}^tA$ s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriétés.
Soit $A, B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- ${}^t({}^tA) = A$,
- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$,
- ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$,
- ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$ (ordre inversé),
- Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.