III. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Il s'agit des équations différentielles de la forme

$$\text{(E)} \qquad ay'' + by' + cy = f(x)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I. $f(x)$ est appelé le second membre de l'équation (E).

Une **solution** à valeurs réelles est une fonction $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que

$$\forall x \in I,\ a\varphi''(x) + b\varphi'(x) + c\varphi(x) = f(x).$$

Résoudre (E) (on dit parfois aussi "intégrer (E)"), c'est chercher toutes les solutions de (E).

On associe à (E) l'équation homogène (ou équation sans second membre) suivante :

$$\text{(H)} \qquad ay'' + by' + cy = 0.$$

Comme pour les équations linéaires du premier ordre, on a le théorème suivant :

Théorème. Si y_0 est une solution particulière de (E), l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $y = y_H + y_0$, où y_H décrit l'ensemble des solutions de (H).

Interprétation dynamique :
Si $y(t)$ est la position d'un mobile à l'instant t, $y'(t)$ est sa vitesse et $y''(t)$ est son accélération. Dans l'équation

$$y'' + by' + cy = 0,$$

le terme cy représente une force attractive (si $c > 0$) ou répulsive (si $c < 0$) et le terme by' représente une force de frottement (si $b > 0$).

Il est intéressant pour les calculs de considérer des fonctions φ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On écrit

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$$

avec $\varphi_1(x) = \mathrm{Re}(\varphi(x))$ et $\varphi_2(x) = \mathrm{Im}(\varphi(x))$.
Si $\varphi_1\colon I \to \mathbb{R}$ et $\varphi_2\colon I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions deux fois dérivables, on pose
$\varphi'(x) = \varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)$ et $\varphi''(x) = \varphi_1''(x) + i\varphi_2''(x)$.

Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, les règles de dérivation (somme, produit, composition) restent les mêmes.

Cas particulier important : $\varphi(x) = e^{sx}$ avec $s \in \mathbb{C}$. La dérivée est $\varphi'(x) = se^{sx}$.

Ce résultat se montre de la façon suivante : on écrit $s = a + ib$ et

$$\varphi(x) = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) = \underbrace{e^{ax}\cos(bx)}_{Re(\varphi(x))} + i\,\underbrace{e^{ax}\sin(bx)}_{\mathrm{Im}(\varphi(x))}.$$

On dérive les parties réelle et imaginaire et on obtient :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= [ae^{ax}\cos(bx) - e^{ax}\sin(bx)] + i[ae^{ax}\sin(bx) + e^{ax}\cos(bx)] \\ &= e^{ax}(a+ib)(\cos(bx) + i\sin(bx)) \\ &= (a+ib)e^{(a+ib)x} = se^{sx}\end{aligned}$$

1. Solutions de l'équation homogène

Théorème. Soit (H) : $ay'' + by' + cy = 0$. L'équation caractéristique de (H) est : $ar^2 + br + c = 0$. On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$ et les racines α, β.

- Si $\Delta > 0$, les racines α, β sont réelles avec $\alpha \neq \beta$ et la solution générale de (H) s'écrit $y = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(régime apériodique)*.
- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double $\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$ et la solution générale de (H) s'écrit $y = \lambda e^{\alpha x} + \mu x e^{\alpha x} = (\lambda + \mu x)e^{\alpha x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(régime critique)*.
- Si $\Delta < 0$, on écrit $\alpha = \gamma + i\omega$, $\beta = \gamma - i\omega$ (où γ, ω sont des réels) et la solution générale de (H) s'écrit $y = e^{\gamma x}(\lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x))$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(régime pseudo-périodique)*.

Dans les 3 cas, les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Remarque. Ce qu'on appelle la **solution générale** est une famille de fonctions dépendant des paramètres λ, μ. Il y a donc une infinité de solutions.

Formes alternatives de la solution générale dans le cas $\boldsymbol{\Delta < 0}$:
• $y = \lambda e^{\gamma x}\cos(\omega x + \phi)$ avec $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$.
• $y = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ avec $\underline{\lambda, \mu \in \mathbb{C}}$. On rappelle que les racines α, β sont complexes. Ceci donne l'ensemble des solutions à valeurs complexes (pour les solutions réelles on préfère la forme du théorème).

Cas particulier : $y'' + \omega^2 y = 0$. Les racines sont $\alpha = i\omega$ et $\beta = -i\omega$, les solutions sont $y = \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ *(régime périodique)*.

Preuve du théorème.
Soit $\varphi(x) = e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{C}$. Alors $\varphi'(x) = re^{rx}$, $\varphi''(x) = r^2e^{rx}$ et

$$a\varphi''(x) + b\varphi'(x) + c\varphi(x) = (ar^2 + br + c)e^{rx}.$$

Donc si r est solution de l'équation caractéristique alors φ est solution de (H).

• Si $\alpha \neq \beta$, on a trouvé deux solutions $\varphi_1(x) = e^{\alpha x}$ et $\varphi_2(x) = e^{\beta x}$.

• Si $\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$, on a trouvé une solution $\varphi_1(x) = e^{\alpha x}$.
On pose $\varphi_2(x) = xe^{\alpha x}$. On a $\varphi_2'(x) = (\alpha x + 1)e^{\alpha x}$ et $\varphi_2''(x) = (\alpha^2 x + 2\alpha)e^{\alpha x}$ donc

$$a\varphi_2''(x) + b\varphi_2'(x) + c\varphi_2(x) = [(a\alpha^2 + b\alpha + c)x + (2a\alpha + b)]e^{\alpha x}.$$

Comme α est racine de l'équation caractéristique on a $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. Et comme $\alpha = -\frac{b}{2a}$ on a $2a\alpha + b = 0$. Donc $a\varphi_2''(x) + b\varphi_2'(x) + c\varphi_2(x) = 0$ et φ_2 est une solution de (H).

Dans les deux cas, on a trouvé deux solutions de (H) qui sont φ_1 et φ_2. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On vérifie que $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ est solution de (H) en sommant les deux égalités :

$$\begin{aligned}\lambda(a\varphi_1''(x) + b\varphi_1'(x) + c\varphi_1(x)) &= \lambda.0 = 0\\ \mu(a\varphi_2''(x) + b\varphi_2'(x) + c\varphi_2(x)) &= \mu.0 = 0\end{aligned}$$

On a montré que la fonction $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ est solution de (H) pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On va montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Soit y une solution quelconque de (H). On pose $u(x) = y(x)e^{-\alpha x}$. C'est une fonction deux fois dérivable, comme y. On a :
$y(x) = u(x)e^{\alpha x}$, $y'(x) = [u'(x) + \alpha u(x)]e^{\alpha x}$, $y''(x) = [u''(x) + 2\alpha u'(x) + \alpha^2 u(x)]e^{\alpha x}$. Donc

$$\begin{aligned}ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= [au''(x) + (2a\alpha + b)u'(x) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(x)]e^{\alpha x}\\ 0 &= [au''(x) + (2a\alpha + b)u'(x)]e^{\alpha x}\\ &\quad \text{car } a\alpha^2 + b\alpha + c = 0\end{aligned}$$

Comme $e^{\alpha x} \neq 0$ on a $au''(x) + (2a\alpha + b)u'(x) = 0$, autrement dit la fonction u' est solution de $az' + (2a\alpha + b)z = 0$ (équation différentielle d'ordre 1). On résout cette équation différentielle.

• Si $\Delta \neq 0$ alors $\alpha \neq \frac{-b}{2a}$ et $2a\alpha + b \neq 0$. Donc il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que $u'(x) = Ae^{-(2\alpha + \frac{b}{a})x}$. En intégrant, on trouve $u(x) = \mu e^{-(2\alpha + \frac{b}{a})x} + \lambda$ avec $\mu = \frac{A}{-(2\alpha + \frac{b}{a})}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
On sait que $ar^2 + br + c = a(r - \alpha)(r - \beta) = a(r^2 - (\alpha + \beta)r + \alpha\beta)$ donc $-(\alpha + \beta) = \frac{b}{a}$. Ceci implique que $-(2\alpha + \frac{b}{a}) = \beta - \alpha$. Donc $u(x) = \mu e^{(\beta - \alpha)x} + \lambda$ et $y(x) = \mu e^{\beta x} + \lambda e^{\alpha x}$.

• Si $\Delta = 0$ alors $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et l'équation différentielle devient $au''(x) = 0$. On en déduit qu'il existe μ et λ tels que $u'(x) = \mu$ et $u(x) = \lambda + \mu x$. Donc $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{\alpha x}$.

Dans les 2 cas, on a montré que l'ensemble des solutions de (H) à valeurs complexes est égal à l'ensemble des fonctions $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, autrement dit :
– si $\Delta \neq 0$, $y(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$,
– si $\Delta = 0$, $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{\alpha x}$.

Passage des solutions complexes aux solutions réelles
On va maintenant chercher l'ensemble des solutions à valeurs réelles. Par ce qui précède, ces solutions s'écrivent $y = \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$. De plus, y est une fonction à valeurs réelles si $y(x) = \overline{y(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On admet que si $\forall x \in \mathbb{R},\ Ae^{rx} + Be^{sx} = A'e^{rx} + B'e^{sx}$ avec $r, s \in \mathbb{C}$, $r \neq s$, alors on a nécessairement $A = A'$ et $B = B'$.

• Si $\Delta > 0$ alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $y(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$, donc $\overline{y(x)} = \overline{\lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}} = \overline{\lambda} e^{\alpha x} + \overline{\mu} e^{\beta x}$. Comme $y(x) = \overline{y(x)}$, on a donc $\lambda = \overline{\lambda}$ et $\mu = \overline{\mu}$, autrement dit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les solutions de (H) à valeurs réelles sont donc $y(x) = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

• Si $\Delta = 0$ alors $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{\alpha x}$, donc $\overline{y(x)} = (\overline{\lambda} + \overline{\mu} x)e^{\alpha x}$. Comme précédemment on obtient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les solutions de (H) à valeurs réelles sont donc $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{\alpha x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

• Si $\Delta < 0$ on écrit $\alpha = \gamma + i\omega$ et $\beta = \gamma - i\omega$ (avec $\gamma, \omega \in \mathbb{R}$). Alors $y(x) = e^{\gamma x}(\lambda e^{i\omega x} + \mu e^{-i\omega x})$ et $\overline{y(x)} = e^{\gamma x}(\overline{\lambda} e^{-i\omega} + \overline{\mu} e^{i\omega x})$. Comme $y(x) = \overline{y(x)}$ on trouve $\lambda = \overline{\mu}$ et $\mu = \overline{\lambda}$. Si on écrit $\lambda = A + iB$ (avec $A, B \in \mathbb{R}$) on a $\mu = A - iB$ et

$$y(x) = e^{\gamma x}[A(e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}) + iB(e^{i\omega x} - e^{-i\omega x})] = e^{\gamma x}[2A\cos(\omega x) - 2B\sin(\omega x)].$$

Si A, B décrivent $\mathbb{R}$ alors $\lambda' = 2A$ et $\mu' = -2B$ décrivent également $\mathbb{R}$. Les solutions réelles de (H) sont donc $y(x) = e^{\gamma x}[\lambda' \cos(\omega x) + \mu' \sin(\omega x)]$ avec $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$.

2. Recherche d'une solution particulière

Il existe une méthode de variation des constantes mais nous ne l'étudierons pas.

Quand le second membre a une certaine forme (polynôme, exponentielle,...), il existe une solution particulière de la même forme.

Exemple. (E) $\quad y'' + y' - 2y = e^{2x}$.
On cherche une solution particulière de la forme $y_0(x) = Ae^{2x}$.
$y_0'(x) = 2Ae^{2x}$, $y_0''(x) = 4Ae^{2x}$. Donc $y_0''(x) + y_0'(x) - 2y_0(x) = 4Ae^{2x}$.
En identifiant le coefficient devant e^{2x}, on trouve $4A = 1$ donc $A = \frac{1}{4}$ et $y_0(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$.

Produit d'un polynôme par une exponentielle
Si l'équation différentielle est

$$\text{(E)} \qquad ay'' + by' + cy = P(x)e^{sx}$$

où $P(x)$ est un polynôme de degré n et $s \in \mathbb{C}$, on cherche une solution particulière de (E) de la forme :
• $y_0(x) = Q(x)e^{sx}$ si s n'est pas racine de l'équation caractéristique,
• $y_0(x) = xQ(x)e^{sx}$ si s est une racine simple de l'équation caractéristique,
• $y_0(x) = x^2Q(x)e^{sx}$ si s est racine double de l'équation caractéristique.
Dans les 3 cas, $Q(x)$ est un polynôme de degré n (même degré que $P(x)$).

Cas particuliers :
– Si $s = 0$ alors $f(x) = P(x)$ est un polynôme.
– Si $P(x) = 1$ alors $f(x) = e^{sx}$ et $Q(x) = A$ est une constante.

Exemples.

$$\text{(H)} \qquad y'' - 2y' + y = 0.$$

$r^2 - 2r + 1$ a une racine double $\alpha = 1$. Solution générale de (H) : $y_H = (\lambda + \mu x)e^x$.

$$\text{(E1)} \qquad y'' - 2y' + y = x^2.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = Ax^2 + Bx + C$.
$y_0'(x) = 2Ax + B$, $y_0''(x) = 2A$. Donc $y_0''(x) - 2y_0'(x) + y_0(x) = Ax^2 + (B - 4A)x + (C - 2B + 2A)$.
Identification des coefficients :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B - 4A & = & 0 \\ C - 2B + 2A & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B & = & 4 \\ C & = & 6 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad y_0(x) = x^2 + 4x + 6.$$

La solution générale de (E1) est $y = (\lambda + \mu x)e^x + x^2 + 4x + 6$.

$$\text{(E2)} \qquad y'' - 2y' + y = (x+1)e^x.$$

$\alpha = 1$ est racine double donc on cherche y_0 sous la forme $y_0(x) = x^2(Ax+B)e^x$.

$$\begin{array}{rcl} y_0(x) & = & (Ax^3 + Bx^2)e^x, \\ y_0'(x) & = & (Ax^3 + Bx^2)e^x + (3Ax^2 + 2Bx)e^x = [Ax^3 + (3A+B)x^2 + 2Bx]e^x, \\ y_0''(x) & = & [Ax^3 + (3A+B)x^2 + 2Bx]e^x + [3Ax^2 + (6A+2B)x + 2B]e^x \\ y_0''(x) & = & [Ax^3 + (6A+B)x^2 + (6A+4B)x + 2B]e^x. \end{array}$$

Donc $y_0''(x) - 2y_0'(x) + y_0(x) = (6Ax + 2B)e^x$. Par identification des coefficients, on a $6A = 1$ et $2B = 1$, donc $y_0(x) = x^2\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right)e^x$.

La solution générale de (E2) est $y = \left(\lambda + \mu x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)e^x$.

Théorème.
Si $y(x)$ est une solution de l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$, alors $\mathrm{Re}(y(x))$ est une solution de $ay'' + by' + cy = \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(y(x))$ est une solution de $ay'' + by' + cy = \mathrm{Im}(f(x))$.

Preuve.
Soit $y_1(x) = \mathrm{Re}(y(x))$ et $y_2(x) = \mathrm{Im}(y(x))$. Alors $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ et

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & ay''(x) + by'(x) + cy(x) \\ & = & \underbrace{[ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x)]}_{\text{partie réelle}} + i\underbrace{[ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x)]}_{\text{partie imaginaire}} \end{array}$$

d'où $ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ et $ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x) = \mathrm{Im}(f(x))$.

Exemple. (E) $\quad y'' + y' - 2y = \cos x$.

Équation homogène : (H) $\quad y'' + y' - 2y = 0$.
Équation caractéristique : $r^2 + r - 2$. $\Delta = 9$, $\alpha = 1$, $\beta = -2$.
La solution générale de (H) est $y_H = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On sait que $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$. On cherche d'abord une solution particulière de $y'' + y' - 2y = e^{ix}$ à l'aide de la méthode vue précédemment :
$y_0(x) = Ae^{ix}$, $y_0'(x) = Aie^{ix}$, $y_0''(x) = -Ae^{ix}$ donc $y_0''(x) + y_0'(x) - 2y_0(x) = (-3+i)Ae^{ix}$.
Par identification on trouve $A = \frac{1}{-3+i} = \frac{-3-i}{3^2+1^2} = \frac{-3-i}{10}$.

Par le théorème précédent, la fonction $\mathrm{Re}(y_0(x))$ est une solution de (E).
On a $y_0(x) = \frac{-3-i}{10}e^{ix} = \frac{-3-i}{10}(\cos x + i\sin x)$ donc $\mathrm{Re}(y_0(x)) = \frac{-3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$.

Conclusion : la solution générale de (E) est : $y = \lambda e^x + \mu e^{-2x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$.

Remarque. Quand le second membre est de la forme $\cos(\Omega x)$ ou $\sin(\Omega x)$, on peut chercher une solution particulière de la forme $y_0(x) = A\cos(\Omega x) + B\sin(\Omega x)$ si $i\Omega$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique, ou de la forme $y_0(x) = x[A\cos(\Omega x) + B\sin(\Omega x)]$ si $i\Omega$ est une racine de l'équation caractéristique.

Théorème (principe de superposition).
Si $y_1(x)$ est une solution de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$ et si $y_2(x)$ est une solution de $ay'' + by' + cy = f_2(x)$, alors $y_1(x) + y_2(x)$ est une solution de $ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$.

Preuve.

$$\begin{array}{lrcl} \text{(E1)} & ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x) & = & f_1(x) \\ \text{(E2)} & ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x) & = & f_2(x) \end{array}$$

Soit $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. On a $y'(x) = y_1'(x) + y_2'(x)$ et $y''(x) = y_1''(x) + y_2''(x)$, donc si on additionne (E1) et (E2) on obtient :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Exemple. (E) $\quad y'' - y' + y = x^2 + (x+1)e^x$.
On a vu que $y_1(x) = x^2+4x+6$ est une solution de $y''-2y'+y = x^2$ et $y_2(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)e^x$ est une solution de $y'' - 2y' + y = (x+1)e^x$, donc $y_0(x) = x^2 + 4x + 6 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)e^x$ est une solution particulière de (E).
La solution générale de (E) est $y = \left(\lambda + \mu x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)e^x + x^2 + 4x + 6$.

3. Solution vérifiant des conditions initiales

Comme il y a deux paramètres (λ et μ) il faut deux conditions pour déterminer entièrement une solution.

Théorème. Soit (E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$.
Il existe une unique solution de (E) vérifiant $y(x_0) = C$ et $y'(x_0) = C'$.

On ne démontre pas ce théorème dans le cas général, on le démontrera au cas par cas.

Méthode :
– chercher la solution générale de l'équation (E) sans s'occuper des conditions initiales,
– déterminer λ et μ à l'aide des deux équations $y(x_0) = C$ et $y'(x_0) = C'$.

Autres types de conditions initiales possibles :
– $y(x_0) = C_0$ et $y(x_1) = C_1$,
– $y(x_0) = C$ et $y'(x_1) = C'$.
En général il y a une unique solution, mais dans certains cas il y en a plusieurs, ou aucune.

Exemple. (E) : $y'' + y = 0$
L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$, les racines sont i et $-i$. La solution générale de (E) est $y = \lambda\cos x + \mu\sin x$.
• Conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$:
$y(0) = \lambda$ donc $\lambda = 0$. $y'(x) = -\lambda\sin x + \mu\cos x$, $y'(0) = \mu$ donc $\mu = 1$. Il y a une unique solution, qui est $y(x) = \sin x$.
• Conditions initiales $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 0$:
$y(0) = \lambda$ donc $\lambda = 0$. $y(2\pi) = \lambda = 0$. Pas de condition sur μ, donc toutes les solutions $y(x) = \mu\sin x$ conviennent.
• Conditions initiales $y(0) = 0$ et $y(2\pi) = 1$:
$y(0) = \lambda$ donc $\lambda = 0$. $y(2\pi) = \lambda$. Or $\lambda = 0 \neq 1$ donc il n'y a pas de solution.