Université Paris-Sud | S2SM
Centre d'Orsay | 2003-2004

Mathématiques

Feuille d'exercices 7

Exercice 1

Des deux intégrales suivantes, laquelle est la plus facile à calculer ? Effectuer ce calcul.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \left(\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx.$$

Exercice 2

Calculer $\int\int_D \frac{xy^2}{1+x^2} dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 3

Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dx \right) dy$, puis $\int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dy \right) dx$.
L'égalité était-elle prévisible ?

Exercice 4

Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} a^x b^y dx \right) dy$, où a et b sont des réels strictement positifs, distincts et différents de 1.

Exercice 5

Pour $0 < \varepsilon < 1$, calculer $I_\varepsilon = \int\int_{D_\varepsilon} \exp\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$,
où $D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq x,\ \varepsilon \leq x \leq 1\}$. Quelle est la limite de I_ε lorsque ε tend vers 0 ?

Exercice 6

Calculer $\int\int_D (1-x-y) dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Exercice 7

Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \leq 2 - x^2\}$.

Exercice 8

Calculer (en utilisant les coordonnées polaires) $\int\int_D \frac{y^3}{x^2+y^2} dxdy$,
où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \leq x\}$.

Exercice 9

Calculer directement, puis à l'aide des coordonnées polaires $\int\int_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$,
où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq \sqrt{3},\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\}$.

Exercice 10

Calculer $\int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq R^2\}$.

Exercice 11

Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h et de base rectangle de largeur l et de longueur L.

Exercice 12

Soit $a > R > 0$. Calculer l'intégrale suivante, qui détermine le potentiel électrique créé au point $(0, 0, a)$ par la sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon R chargée uniformément par une densité de charge constante ρ.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\int\int_{B(0,R)} \frac{\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} dxdydz$$

Exercice 13

Déterminer et représenter l'ensemble de définition, puis calculer les dérivées partielles des fonctions définies par :

$$f_1(x, y) = \arctan(xy), \quad f_2(x, y) = \arctan(\frac{x}{y}), \quad f_3(x, y) = \exp(\frac{x}{y}) + \exp(\frac{y}{x}),$$

$$f_4(x, y) = x^2 \sin(y), \quad f_5(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad f_6(x, y) = \ln(x + y).$$

Exercice 14

a) Trouver toutes les fonctions f telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3y^2 + 2xy^4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4y + 4x^2y^3 + \cos(y)$$

Comparer $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ et $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$.

b) Mêmes questions avec:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$

Exercice 15

1. Trouver toutes les fonctions $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) = 0.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On pose $F(u, v) = f(u + v, u - v)$ pour u, $v \in \mathbb{R}$. Calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$. En déduire toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui vérifient:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 16

Soient F $:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^2 et

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}. \\ & (x, y, z) & \mapsto & F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{array}$$

Calculer le Laplacien de f en fonction de F' et F'', puis déterminer F telle que $\Delta f = 0$.