Université Paris–Sud
Centre d'Orsay

S2SM
Mathématiques
2003/2004

Feuille 5

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les trois triplets $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (-1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,1)$. Montrer que u_1, u_2 et u_3 engendrent $\mathbf{R}^3$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$. Calculer les coordonnées des vecteurs $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1)$ et $v_3 = (2,-3,1)$ dans cette base[1].

Exercice 2. Déterminer pour quelles valeurs du réel t, les vecteurs $u_1 = (1,0,t)$, $u_2 = (1,1,t)$ et $u_3 = (t,0,1)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 3. a) Montrer que les vecteurs $w_1 = (1,-1,i)$, $w_2 = (-1,i,1)$, $w_3 = (i,1,-1)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^3$ sur $\mathbf{C}$.
b) Déterminer les coordonnées de $v = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

Exercice 4. Trouver une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ dans chacun des cas suivants.

a. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 | x + 2y = 0\}$;

b. F admet comme système d'équations cartésiennes [2] $\begin{cases} x + 2y & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{cases}$.

c. F est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y - z - t & = & 0 \\ x - y + z - t & = & 0 \\ 4x - y + 2z - 4t & = & 0 \end{cases}.$$

Dans chacun des cas, préciser un système d'équations paramétriques.

Exercice 5. Déterminer un système d'équations cartésiennes du sous-espace vectoriel F de E dans les cas suivants :
(a) $E = \mathbf{R}^3$ et F est engendré par $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$;
(b) $E = \mathbf{R}^3$ et $F = \text{Vect}\ ((1,2,-1))$.
(c) $E = \mathbf{R}^2$ et $F = \text{Vect}\ ((1,2))$.
(d) $E = \mathbf{R}^4$ et $F = \text{Vect}\ ((1,2,-1,0),(2,-1,0,1),(0,1,-1,2))$.
(e) $E = \mathbf{R}^4$ et $F = \text{Vect}\ ((1,-2,-1,0),(2,-2,-1,1),(-1,0,-1,-2))$.
(f) $E = \mathbf{R}^4$ et F est l'intersection des sous-espaces définis en (d) et (e).

---

[1] Les deux expressions "coordonnées d'un vecteur dans une base" et "composantes d'un vecteur sur une base" sont synonymes.

[2] Dans un espace vectoriel E de dimension n muni d'une base, un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel F est un système homogène d'équations linéaires donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur appartienne à ce sous-espace, condition s'énonçant sous la forme : un vecteur de E appartient à F si et seulement si le n-uplet de ses coordonnées est une solution de (S).

(g) $E=\mathbf{R}^3$ et F est la somme des sous-espaces définis en (a) et (b).

Exercice 6. Soit $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ des matrices 3×3 à coefficients réels. Montrer que l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $AM=MA$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. Donner une base et la dimension de ce sous-espace.

Exercice 7. Déterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel

$$E=\{(x,y,z,t,u)\in\mathbf{R}^5|x+2y-5z+3t-u=0,2x+y-2u=0\}.$$

Exercice 8. a. Montrer que les sous-espaces vectoriels $F=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x+2y=0\}$ et $G=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2|x-y=0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^2$.
b. Montrer que les sous-espaces vectoriels $F=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|x+y+z=0\}$ et $G=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3|x-y=x+z=0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
c. Montrer que les sous-espaces vectoriels $F=\text{Vect }(1-X+X^2,1+2X-X^3)$ et $G=\{a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3\in\mathbf{R}_3[X]|a_0+a_1-a_2-a_3=0,a_0-a_1+a_2-a_3=0\}$ sont supplémentaires dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 3.

Exercice 9. On considère la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ suivante :

$$\mathcal{F}=\{v_1=(1,2,0,1),v_2=(4,4,1,2),v_3=(2,0,1,0),v_4=(2,2,\tfrac{1}{2},1)\}.$$

a. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Calculer son rang. Déterminer les relations de dépendance entre les vecteurs de $\mathcal{F}$.
b. Soit F le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\mathcal{F}$. Quelle est la dimension de F ? Extraire de $\mathcal{F}$ une famille libre $\mathcal{F}'$ engendrant F.
c. On note $\mathcal{G}$ la famille génératrice de $\mathbf{R}^4$ formée des vecteurs $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. Compléter $\mathcal{F}'$ en une base de $\mathbf{R}^4$ à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$.
d. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 10. Soit E l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. Soient $A_1=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}-1&0\\2&0\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $A_5=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ cinq matrices de E.
a. Montrer que la famille $\mathcal{F}=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ engendre E.
b. La famille $\{A_1,A_2,A_4\}$ est-elle liée ? Si oui, préciser les relations de dépendance entre A_1, A_2 et A_4.
c. Extraire de $\mathcal{F}$ une base de E.
d. Déterminer un supplémentaire de Vect (A_1,A_2).

Exercice 11. a. Soit G le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $u=(1,-1,2,-2)$, $v=(4,0,1,-5)$ et $w=(3,1,-1,-3)$. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations cartésiennes de G.
b. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère le sous-espace $H=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4|x=y=x-y+z+2t=0\}$. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations paramétriques de H.
c. Déterminer une base de $G\cap H$, la dimension et une base de $G+H$.
d. Déterminer un supplémentaire F de $G+H$ dans $\mathbf{R}^4$.