

Mathématiques

Devoir 1

A rendre la semaine du 9 février.

Exercice 1 Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n la fonction qui à x associe $(\ln x)^n$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet une unique primitive sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1. On note F_n cette primitive.

b) Calculer F_1 puis $\lim_{x \rightarrow 0^+} F_1(x)$.

c) En s'inspirant du calcul de F_1 , trouver une relation entre F_{n+1} et F_n , pour $n \geq 1$.

d) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F_n(x) = (-1)^{n+1} n!$$

Exercice 2

a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{1}{X^4 - 1}$$

b) Soit f la fonction qui à x associe

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 - 2 \cos^2 x}$$

Montrer que f est définie continue sur $I =]-\pi/4, \pi/4[$.

c) Calculer les primitives de f sur I (On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan x$ et remarquer que $1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$).