Département de Mathématiques d'Orsay
L3 MFA et M1 Mathématiques et Applications
Sujets de Projet et de TER

2018

Table des matières

1 Homologie simpliciale et caractéristique d'Euler

Frédéric Bourgeois – frederic.bourgeois@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
L'homologie simpliciale est un invariant de topologie algébrique associé à une classe d'espaces assez simples, appelés complexes simpliciaux. Cet invariant permet d'établir assez rapidement des résultats topologiques significatifs. En particulier, le fait que pour un polyèdre convexe, le nombre de sommets et de faces, diminué du nombre d'arêtes, est toujours égal à 2 (qui est la caractéristique d'Euler de la sphère).
L'homologie simpliciale admet un grand nombre de variantes et de généralisations à de plus larges classes d'espaces topologiques. Ce sujet pourra ainsi être adapté au niveau et aux connaissances préalables des étudiants qui choisiront ce sujet.

2 Formulations de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer sur les courbes elliptiques

Daniel Disegni – daniel.disegni@math.u-psud.fr
Niveau : M1
La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (BSD) et l'hypothese de Riemann sont souvent considerés les deux problemes ouverts les plus importants en theorie des nombres. BSD fait le lien entre le nombre de solutions à une equation cubique en deux variables dans (i) d'un coté, le corps rationnel $\mathbb{Q}$; (ii) de l'autre cotés, touts les corps finis $\mathbb{F}_p$. L'hypothese de Riemann est une conjecture sur la fonction zeta, une fonction meromorphe qui connait la distribution des nombre premiers. La formulation "naive" de BSD est trop forte : elle implique aussi une analogue de l'hypothese de Riemann. Le but du projet est de comprendre les bases de la théorie des courbes elliptiques et la formulation moderne de BSD. Prerequis : analyse complexe ; un peu de geometrie algebrique elementaire pourra aider aussi. References : Milne, Elliptic curves (notes en ligne) ; Goldfeld, Sur les produits partiels euleriens attachés aux courbes elliptiques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 294 (1982).

3 Transcendance de e et pi : approche de Hermite et Lindemann

Stéphane Fischler – stephane.fischler@math.u-psud.fr
Niveau : M1

Hermite a demontre en 1873 que le nombre e = exp(1) est transcendant, c'est-a-dire qu'il n'est racine d'aucun polynome non nul a coefficients entiers. Lindemann a obtenu en 1882 le meme resultat pour pi. Le but de ce memoire est d'etudier une preuve de ces resultats, proche de celle d'origine : astucieuse et assez elementaire.
A. Baker, Transcendental Number Theory, Cambridge Mathematical Library (chapitre 1).

4 Transcendance de e et pi avec analyse complexe

Stéphane Fischler – stephane.fischler@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Hermite a demontre en 1873 que le nombre e = exp(1) est transcendant, c'est-a-dire qu'il n'est racine d'aucun polynome non nul a coefficients entiers. Lindemann a obtenu en 1882 le meme resultat pour pi. Le but de ce memoire est d'etudier le theoreme general de Schneider-Lang, qui implique notamment que e et pi sont transcendants ; l'analyse complexe joue un role central.
S. Lang, Algebra, 3rd edition (Appendice).

5 Principe analytique du grand crible

Etienne Fouvry – etienne.fouvry@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Il s'agit de comprendre tout ou partie du célèbre article de H.L. Montgomery "The analytic principle of the large sieve (Bulletin of the American Mathematical Society, volume 84, Number 4, July 1978, page 547-567)
Le grand crible est en fait une inégalité sur les sommes trigonométriques. Cette inégalité maintenant classique peut se prouver de diverses façons (c'est l'objet de l'article) et elle fournit de multiples applications à des phénomènes d'équirépartition.

6 Sommes de deux carrés, de quatre carrés, de trois carrés.

Etienne Fouvry – etienne.fouvry@math.u-psud.fr
Niveau : L3
Il s'agit de lire et comprendre une partie du tres celebre livre d'arithmetique "Introduction to the theory of numbers" (auteurs Hardy et Wright). Quels sont les entiers n qu'on peut ecrire sous la forme $n = a^2 + b^2$? Pourquoi tout entier n peut-il s'ecrire sous la forme $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, Qu'en est-il de l'equation $n = a^2 + b^2 + c^2$? A-t-on une formule pour

le nombre de telles representations de l'entier n ? Evidemment, a, b, c et d sont des entiers naturels.
L'étudiant prendra ainsi connaissance de certains splendides resultats de l'arithmetique.

7 Comment bien mélanger un paquet de cartes ?

Amaury Freslon – Amaury.Freslon@math.u-psud.fr
Niveau : L3
Vous êtes-vous déjà demandé combien de fois il fallait battre un paquet de cartes pour qu'il soit "bien mélangé" ? La réponse dépend bien sûr de la façon de mélanger, mais aussi de la façon de mesurer la distance entre un paquet réellement mélangé et un paquet aléatoirement mélangé. Mathématiquement, le problème se ramène à l'étude de marches aléatoires sur le groupe des permutations. Le but de ce projet est de comprendre cette formulation et d'établir des résultats explicites pour deux examples : la transposition "top-to-random" et le plus réaliste "riffle shuffle". La démonstration utilisera de la combinatoire, des probabilités finies et de très jolies astuces.

8 La loi de Wigner pour les granndes matrices aléatoires

Amaury Freslon – Amaury.Freslon@math.u-psud.fr
Niveau : L3
En physique quantique pour comprendre un système il faut connaître les valeurs propres de son Hamiltonien, qui est une matrice dont la taille dépend du nombre de degré de liberté du système. Par exemple, pour un seul atome d'uranium radioactif il faut compter au moins 235^3 coefficients. Diagonaliser une telle matrice est impossible et Wigner a suggéré la modélisation suivante : supposons que les coefficients de la matrice soient des variables aléatoires indépendantes et que la taille de la matrice tende vers l'infini, que peut-on dire de son spectre ? Le but du projet est de montrer que sous certaines conditions, la mesure uniforme de l'ensemble des valeurs propres converge vers la loi dite du "demi-cercle". L'approche sera combinatoire via la *méthode des moments* mais utilisera aussi quelques éléments de probabilités.

9 Mesure de Haar pour les groupes quantiques finis

Amaury Freslon – Amaury.Freslon@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Les groupes quantiques sont une généralisation des groupes où toutes les propriétés sont

traduites et traitées en termes d'algèbres et de leur structure duale appelée cogèbre. Un groupe quantique est dit fini si son algèbre est de dimension finie. Le but de ce projet sera, outre la compréhension de la définition des groupes quantiques fini, d'étudier l'existence d'une *mesure de Haar*, c'est-à-dire d'une mesure invariante par l'action du groupe quantique sur lui-même.

10 Introduction a l'analyse microlocale

Patrick Gérard – patrick.gerard@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Le but de ce projet de TER est d'introduire a l'un des outils modernes de l'analyse des equations aux derivees partielles. Le principe est d'etudier les singularites d'une distribution a l'aide de l'analyse de Fourier, en associant a chaque distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, un sousensemble fermé de $\Omega \times \S_1^d$, appelé front d'onde de la distribution, qui se projette sur le support singulier de la distribution, c'est-à-dire le complementaire dans des points au voisinage desquels cette distribution est une fonction [1]. On montrera d'une part que le front d'onde possede de remarquables proprietes pour les solutions d'equations aux dérivées partielles linéaires a coefficients [1], d'autre part qu'il permet de de
nir sur les distributions des opérations en genéral interdites, telles que leur produit. Ce travail debouche naturellement sur la theorie des operateurs pseudo-différentiels, enseignée au niveau M2.
Prerequis : Avoir suivi un cours de distributions traitant de la transformation de Fourier des distributions temperees.
Bibliographie. Lars Hormander, The analysis of linear partial dierential operators, vol. 1, Chap. VIII, Springer, 1983.
JeanMichel Bony, Front d'onde et operations sur les distributions, journees X-UPS, 2002. www.math.polytechnique.fr/xups/xups03-02.pdf

11 Modèle de graphe aléatoire d'Erdös-Rényi

Sophie Lemaire – Sophie.Lemaire@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Le modèle le plus simple de graphe aléatoire à n sommets consiste à connecter chaque couple de sommets entre eux indépendamment avec probabilité p_n. On étudiera quelques propriétés de ce modèle lorsque n tend vers $+\infty$, notamment : - la probabilité que le graphe ait des sommets isolés ; - la probabilité que le graphe soit connexe ; - le lien entre la taille d'une composante et la population totale d'une processus de branchement ; - des estimations de la taille des composantes permettant de mettre en évidence un phénomène

de transition de phase. On pourra aussi étudier le lien entre le modèle d'Erdös-Rényi et le modèle d'épidémie proposé en 1920 par L. Reed et W. Frost. Références bibliographiques : - Remco van der Hofstad, Random graphs and Complex Networks, chapitres 1 à 5. `http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN.pdf` - A. Barbour, D. Mollison (1990), "Epidemics and random graphs", Stochastic Processes in Epidemic Theory Lecture Notes in Biomath. 86 p. 8689, Springer http ://www.macs.hw.ac.uk/ denis/epi/bm90.pdf

12 Modèle de Moran sur un graphe

Sophie Lemaire – Sophie.Lemaire@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Le modèle de Moran est un modèle markovien simple décrivant l'évolution de la composition d'une population de taille constante formée de deux types d'individus ayant des valeurs sélectives différentes. La structure de la population est modélisée par un graphe dont les sommets représentent les individus de la population, les arètes décrivent les relations de voisinage entre individus. A chaque instant, un individu est choisi dans la population avec une probabilité dépendant de sa valeur sélective. Il donne naissance à un individu qui remplace un voisin choisi avec une probabilité dépendant des poids sur les arètes. On s'intéressera d'abord aux propriétés de ce modèle dans le cas d'une population homogène. On décrira notamment le processus généalogique correspondant (qui décrit les liens de parenté entre un échantillon d'individus d'une génération donnée), les probabilités de fixation d'un type d'individus et le temps de fixation. On étudiera ensuite la probabilité de fixation d'un type en fonction de la structure du graphe. Références bibliographiques : - E. Lieberman, et al. (2005) "Evolutionary dynamics on graphs", Nature 433, 312-316. - T. Monk, P. Green and M. Paulin (2014) "Martingales and fixation probabilities of evolutionary graphs". - J. Diaz et al. (2013) "Absorption time of the Moran Process", `http://arxiv.org/abs/1311.7631` - R. Durrett (2002), "Probability Models for DNA Sequence Evolution", Springer . - J-F Delmas et B. Jourdain (2006) "Modèles aléatoires", chapitre 7, Springer.

13 Le petit théorème de Picard

Chinh Lu – hoang-chinh.lu@u-psud.fr
Niveau : L3
Le petit théorème de Picard affirme que toute fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, avec $a \neq b$ est constante. Dans ce projet nous donnons une preuve de ce théorème utilisant la théorie des fonctions harmoniques. La référence est le premier chapitre du livre de Ransford [**?**].
Thomas Ransford, Potential theory in the complex plane, London Mathematical Society

Student Texts, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR 1334766

14 Théorie du pluripotentiel

Chinh Lu – hoang-chinh.lu@u-psud.fr
Niveau : M1
On propose d'étudier les propriétés élémentaires des fonctions plurisousharmoniques et de l'opérateur de Monge-Ampère complexe. Plus précisément, le but est de résoudre le problème de Dirichlet sur un domaine strictement pseudoconvex par la méthode de Bedford et Taylor :

$$(dd^c u)^n = fdV \ in \ \Omega, \ u = \phi \ on \ \partial\Omega,$$

où $0 \leq f$ est une fonction continue sur Ω et ϕ est une fonction lisse sur $\partial\Omega$. Les références sont [**?**] et [**?**].

Eric Bedford and B. A. Taylor, The Dirichlet problem for a complex Monge- Ampere equation, Invent. Math. 37 (1976), no. 1, 1-44.
Vincent Guedj and Ahmed Zeriahi, Degenerate complex Monge-Ampere equations, EMS Tracts in Mathematics, vol. 26, European Mathematical Society (EMS), Zurich, 2017. MR 3617346

15 Limites locales d'arbres de Galton–Watson

Cyril Marzouk – cyril.marzouk@u-psud.fr
Niveau : M1
Les processus de Galton–Watson forment l'un des modèles les plus simples de dynamique des populations : ils décrivent l'évolution aléatoire d'une famille partant d'un unique ancêtre et dans laquelle chaque individu se reproduit indépendamment des autres, selon une loi de probabilité μ fixée. On s'intéresse ici à l'arbre généalogique associé, appelé arbre de Galton–Watson.
Un résultat célèbre de Kesten stipule que, sous certaines hypothèses sur μ, si l'on conditionne un tel arbre à atteindre le niveau n (i.e. il y a au moins un individu à la génération n), alors cette suite d'arbres aléatoires $_n$ converge *localement* lorsque $n \to \infty$ vers un arbre dit « l'arbre conditionné à survivre ». Une telle convergence vers cette même limite a ensuite été démontrée par différents auteurs pour d'autres types de conditionnement : avoir exactement n individus, ou avoir exactement n individus sans aucun enfant par exemple. L'objectif ce TER est d'étudier un théorème récent d'Abraham et Delmas qui ont unifié tous ces résultats dans un cadre général qui regroupe les précédents conditionnements et davantage encore. Il faudra dans un premier temps comprendre la construction d'un arbre de Galton–Watson et de l'arbre limite, ainsi que la convergence locale de graphes.

Références principales : l'article d'Abraham et Delmas : *Local limits of conditioned Galton–Watson trees: the infinite spine case* (`https://projecteuclid.org/euclid.ejp/1465065644`), éventuellement un autre article *Local limits of conditioned Galton-Watson trees: the condensation case* (`https://projecteuclid.org/euclid.ejp/1465065698`), ainsi que des notes de cours de ces auteurs (`https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01164661`).

16 Limites de Grandes matrices aléatoires et liberté

Edouard Maurel-Segala – edouard.maurel-segala@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Il s'agit de comprendre les limites de spectres de grandes matrices aléatoires lorsque leur dimension tend vers l'infini. Tout d'abord dans le cas d'une matrice symétrique à entrées identiquement distribuées pourlesquel le Théorème de Wigner montre la convergence vers la loi semi-circulaire. Le but est ensuite de parvenir à comprendre le cadre utilisé pour analyser la limite jointe des objets non-commutatifs que sont les matrices et la notion de liberté analogue de la notion d'indépendance en grande dimension.
Références : Introduction to Random Matrices - Anderson, Guionnet, Zeitouni ; Free Random Variables - Dykema, Nica, Voiculescu

17 Trafic en accordéon

Bertrand Maury – Bertrand.Maury@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Tout conducteur a vécu cette expérience : dans certaines circonstance, la conduite sur autoroute prend la forme d'une alternance entre des phases lentes et des phases d'avancée plus rapide, sans qu'aucun facteur exogène puisse expliquer ce phénomène. Un modèle simple de circulation automobile, qui prend la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires, permet d'expliquer l'émergence spontanée de ce phénomène, qui peut s'expliquer par l'instabilité native du système linéarisé autour de sa position d'équilibre. Le modèle de départ est basé sur deux ingrédients : la vitesse d'un conducteur est fonction de la distance au véhicule qui le précède, et l'estimation de cette distance est faite par le conducteur avec un certain retard. On peut vérifier que, selon le profil de réponse des conducteurs et leurs temps de réaction, la matrice correspondant au système linéarisé possède des valeurs propres de partie réelle strictement positive. Le projet consiste en l'étude approfondie de cette démarche, qui peut aller jusqu'au développement de nouveaux modèles d'évolution, et pourra s'accompagner de tests numériques (en Python) pour illustrer ces phénomènes.
Références : des notes détaillées concernant ce phénomène seront fournies, ainsi qu'une liste de publications abordant cette question selon des angles variés.

18 Équilibres de Nash dans un contexte géométrique : le problème d'Hotelling

Quentin Mérigot – Quentin.Merigot@math.u-psud.fr

Niveau : L3 ou M1

Le problème d'Hotelling est à l'intersection de la théorie des jeux et de l'économie, et a également des liens avec la théorie du transport optimal. On considère N boutiques positionnés en des points $y_1, \dots, y_N$ de $\Omega = [0,1]^d$ et vendant des produits qu'on suppose indistinguables. Les prix de vente $p_1, \dots, p_N$ des produits détermine alors complètement le comportement des acheteurs : un client positionné en $x \in \Omega$, cherche un compromis entre le temps de trajet (soit $|x - y_i|^2$) et le prix du produit (soit p_i), et choisit donc la boutique i qui minimise $|x - y_i|^2 + p_i$. Le bénéfice de la $i$ème boutique est donc le produit du prix de vente p_i par le nombre de clients soit

$$B_i(p) = p_i \mathrm{vol}^d(V_i(p)) \quad \text{où} \quad V_i(p) := \{x \in \Omega | \forall j, |x - y_i|^2 + p_i |x - y_j|^2 + p_j\}.$$

Une famille de prix $p \in R^N$ est appelée équilibre de Nash si aucune des boutiques ne peut augmenter son bénéfice en modifiant (uniquement) son prix de vente. Montrer l'existence d'équilibres de Nash est souvent un problème assez difficile. Une stratégie, proposée par Rosen, repose sur l'utilisation de propriétés de concavité des B_i et sur un théorème de point fixe. L'objet de ce sujet est d'étudier les arguments de Rosen dans le cadre du problème d'Hotelling. Ce sujet se prête très bien à une expérimentation numérique en dimension $d = 1, 2$, car les preuves d'existence (par point fixe) sont constructives.

Références : J.B. Rosen, Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave N -Person Games, Econometrica, 1965.

19 Quantification optimale

Quentin Mérigot – Quentin.Merigot@math.u-psud.fr

Niveau : L3 ou M1

Le problème de la quantification optimale d'une densité de probabilité ρ supportée sur un ouvert (borné) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ consiste à trouver un ensemble de N points permettant d'approcher au mieux la densité ρ en le sens suivant

$$E(x_1, \dots, x_N) := \int_\Omega \min_{1 \le i \le N} |x - x_i|^2 \rho(x) dx$$

Ce problème apparaît de manière naturelle dans des domaines appliqués (notamment en statistique, en analyse d'image, pour la construction de maillages) et pose de nombreuses questions mathématiques intéressantes, comme l'étude de la limite asymptotique

($N \to \infty$) de la distribution des points optimaux. La solution du problème induit une décomposition du domaine appellé “tessellation de Voronoi centroidale”. Un théorème de L. Fejès Toth affirme que les cellules de cette dcomposition sont asymptotiquement hexagonales en dimension 2 (le comportement similaire en dimension 3 n'a pas encore été établi mathématiquement). Le travail personnel consistera à comprendre la démonstration du théorème de L. Fejès Toth ; éventuellement accompagné d'expérimentations numérique en dimension $d = 2, 3$.

Références : (a) S. Graf, H. Luschgy Foundations of quantization for probability distributions, LNM, Springer-Verlag, 2000. (b) P.M. Gruber

20 Distribution des valeurs propres du laplacien : Loi asymptotique de Weyl

Stéphane Nonnenmacher – Stephane.Nonnenmacher@math.u-psud.fr
Niveau : M1
On s'intéresse au spectre de deux versions de l'opérateur de Laplace :

- le laplacien $-\Delta_\Omega$ sur un domaine borné $\Omega \subset^d$ avec conditions aux limites de Dirichlet
- l'opérateur de Laplace-Beltrami $-\Delta_X$ sur une variété riemannienne compacte X_d de dimension d.

Dans les deux cas, ces opérateurs sont auto-adjoints et positifs sur $L^2(\Omega)$ (resp. $L^2(X)$), et admettent un spectre purement discret $\mathrm{Spec}(-\Delta) = (\lambda_n)_{n\in}$ fait de valeurs propres de multiplicités finies $\lambda_n \stackrel{n\to\infty}{\to} \infty$.
On s'intéresse à la distribution des grandes valeurs propres, en étudiant le comportement asymptotique de la *fonction de comptage*

$$N(\Lambda) = \#\{\lambda_n \leq \Lambda\}.$$

H.Weyl a montré en 1911 que cette fonction de comptage admet un asymptotique de la forme

$$N(\Lambda) = C_d \,\mathrm{Vol}(\Omega)\, \Lambda^{d/2}(1 + o(1)), \qquad \Lambda \to \infty,$$

avec C_d une constante universelle ne dépendant que de la dimension d. Autrement dit, la densité asymptotique des valeurs propres est proportionnelle au volume du domaine (ou de la variété riemannienne).
En faisant plus d'hypothèses sur la géométrie de Ω (resp. de X), cette *loi de Weyl* a pu être rendue plus précise, sous la forme d'un contrôle du reste.
Les diverses preuves de cette loi de Weyl utilisent plusieurs outils :

- la preuve originale de Weyl utilise le principe variationnel pour le spectre d'opérateurs autoadjoints, qui permettent de comparer le spectre de $-\Delta_\Omega$ à celui du laplacien sur une union de cubes disjoints “proche” de Ω.

— des preuves ultérieures utilisent des asymptotiques du semigroupe de la chaleur sur Ω, ou du groupe des ondes sur Ω.

Je propose plutôt une lecture de la seconde méthode, utilisant l'asymptotique du semi-groupe de la chaleur. On trouvera une preuve détaillée du cas des domaines euclidiens $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans

— C.Zuily, *Distributions et équations aux dérivées partielles : Cours et problèmes résolus*, Dunod

21 Ensembles nodaux d'harmoniques sphériques aléatoires

Stéphane Nonnenmacher – Stephane.Nonnenmacher@math.u-psud.fr
Niveau : M1

On connait explicitement le spectre du Laplacien sur la sphère $\mathbb{S}^2$: les valeurs propres sont de la forme $\{\lambda_l = l(l+1),\ l \in \mathbb{N}\}$, et chaque valeur propre λ_l correspond à un espace propre V_l de dimension $(2l+1)$. Chaque espace propre admet une base othonormée de fonctions réelles $\{u_l^m(x),\ m = 1, \ldots, 2l+1\}$, dont on connait des formules explicites. Toute fonction propre (harmonique sphérique) de valeur propre λ_l peut donc s'écrire sous la forme

$$u_l(x) = \sum_{m=1}^{2l+1} \alpha_m u_l^m(x),$$

avec α_m des coefficients réels arbitraires.

A quoi ressemble alors une fonction propre *typique* ? Pour répondre à cette question on prendra des coefficients α_m *aléatoires*, aboutissant à la notion de *fonction propre aléatoire* sur la sphère. L'intérêt pour ces fonctions propres aléatoires provient de questions de *chaos quantique* : ces fonctions fournissent un modèle statistique permettant (conjecturalement) de décrire les propriétés des fonctions propres du laplacien dans des domaines euclidiens pour lesquels on ne dispose pas de formules explicites.

Dans ce projet on s'intéressera en particulier aux *ensembles nodaux* des fonctions aléatoires $u_l(x)$, définis par leurs points d'annulation :

$$\mathcal{Z}(u_l) = \left\{ x \in \mathbb{S}^2 \,|\, u_j(x) = 0 \right\}.$$

Pour une fonction propre u_l générique, ces ensembles nodaux s'organisent en une famille de courbes fermées disjointes. On peut alors se poser diverses questions, en particulier : Quelle est la longueur totale de $\mathcal{Z}(u_l)$? On obtiendra des réponses asymptotiques à ces questions dans la limite de haute fréquence $l \to \infty$.

Bibliographie :

Sur la diagonalisation du laplacien sur $\mathbb{S}^2$ et les propriétés des harmoniques sphériques : on trouve des choses dans la plupart des ouvrages sur les représentations des groupes de Lie.

Je recommande aussi les ouvrages de mécanique quantique, où les notations sont souvent plus digestes. Le laplacien sur $\mathbb{S}^2$ est alors interprété comme l'opérateur moment cinétique.

— T.M. Macrobert, *Spherical Harmonics : An Elementary Treatise on Harmonic Functions, with Applications*, Pergamon, 1967
— A.Messiah, *Mécanique Quantique*, tome 2, chap. 13 (sections 1-3)
— C.Cohen-Tannoudji, B.Liu, F.Laloë, *Mécanique Quantique*, Chap 6 + compléments A_6, B_6

Sur la question des lignes nodales : 2 articles de revue,

— Fedor Nazarov and Mikhail Sodin, *Random Complex Zeroes and Random Nodal Lines*, (Part II), Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, India, 2010 (`arXiv:1003.4237`)
— Igor Wigman, *On the nodal lines of random and deterministic Laplace eigenfunctions* (`arXiv:1103.0150`)

Et 1 article de recherche (au moins pour commencer) :

— Igor Wigman, *On the distribution of the nodal sets of random spherical harmonics*, J. Math. Phys. 50 (2009), no. 1, 013521

22 Équations intégrales pour les problèmes aux limites

Konstantin Pankrashkin – konstantin.pankrashkin@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Le but du travail est de comprendre l'utilisation des équations intégrales pour la résolution de problèmes aux limites. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert regulier et f est une fonction définie sur $\partial\Omega$, on cherche les solutions u pour le problème de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad u = f \quad \text{ sur } \partial\Omega.$$

En cherchant les solutions sous la forme d'une intégrale,

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} K(x,y)g(y)\,d\sigma, \quad x \in \Omega,$$

où K est le noyau *simple couche* ou *double couche*, on réduit le problème initial à une équation intégrale sur le bord pour g, et la nouvelle équation peut être ramené à l'étude d'un opérateur compact dans un espace fonctionnel adapté. Cette approche permet de démontrer l'existence et l'unicité des solutions et étudier leurs propriétés en fonction de f et Ω.
Références : Par exemple, W. Hackbusch : *Integral equations.* Birkhäuser, 1995 (Chapitre 8).

23 Zones de stabilité pour l'équation de Hill

Konstantin Pankrashkin – konstantin.pankrashkin@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Ce sujet est une introduction à la théorie spectrale des milieux périodiques. On considère l'équation différentielle de Hill,

$$-y''(x) + Q(x)y(x) = Ey(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction périodique (*potentiel*) et E est un paramètre (*énergie*). On dit qu'une énergie E est stable si l'équation admet une solution y bornée non-nulle. Le but du travail est de comprendre la structure de l'ensemble des énergies stables et sa dépendance au potentiel.
Références : W. Magnus, S. Winkler : *Hill's equation.* Interscience Publishers, 1962 (Chapitres 1.1–2.2) ou M. S. P. Eastham : *The spectral theory of periodic differential equations.* Scottish Scademic Press, 1973 (Chapitres 1 et 2).

24 Comptage et équidistribution dans le groupe de Heisenberg

Frédéric Paulin – frederic.paulin@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Les phénomènes d'équidistribution, qui interviennent aussi bien en systèmes dynamiques (théorie ergodique) qu'en théorie des nombres (arithmétique), concernent des répartitions harmonieuses pour une mesure ambiante de familles de points ou de sous-espaces choisis par exemple par des constructions arithmétiques ou par itération de transformations préservant la mesure.
Le groupe de Heisenberg de dimension 3 est le groupe des matrices réelles 3×3 triangulaires supérieures à coefficients diagonaux égaux à 1, mais il a de nombreux modèles. Les matrices à coefficients rationnels sont denses dans ce groupe. Le but de ce mémoire, après avoir fait connaissance avec ce beau groupe qui intervient dans de nombreux domaines des mathématiques (dont en contrôle optimal), est de donner une démonstration arithmétique simple d'un cas particulier (mais avec un meilleur terme de reste) d'un théorème à la Mertens de Parkkonen-Paulin de comptage et d'équidistribution vers la mesure homogène des points rationnels dans le groupe de Heisenberg, quand on se fixe une borne sur les dénominateurs et que l'on fait tendre cette borne vers l'infini. Le théorème original de Mertens d'équidistribution des nombres rationnels dans R servira d'apprentissage en douceur. Cet exposé nécessitera une petite acquisition de connaissance en théorie analytique des nombres (anneau principal des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, idées de crible élémentaire, théorème

du reste chinois, calculs de résidus, fonctions zétas, etc), par exemple largement contenue dans le cours d'arithmétique, mais il n'est pas vraiment obligatoire de suivre ce cours.

Références : [1] Une toute petite partie de G. H. Hardy et E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford Univ. Press, sixth ed., 2008.
[2] H. Iwaniec et E. Kowalski, Analytic Number Theory, Colloq. Pub. Amer. Math. Soc 2004.
[3] J. Parkkonen et F. Paulin, Counting and equidistribution in Heisenberg groups. Prépublication, fév 2014 hal-00955576, arXiv :1402.7225, à paraître dans Mathematische Annalen `http://www.math.u-psud.fr/paulin/preprints/heisenberg.pdf`.
[4] P. Samuel, Théorie algébrique des nombres, Hermann, 1967

25 Mesures de Gibbs sur des ensembles infinis

Yan Pautrat – yan.pautrat@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Si Ω est un ensemble fini et que l'on se donne une fonction E d'énergie sur Ω, on peut justifier l'importance des mesures dites "de Gibbs", i.e. de la forme $\pi(\omega) = Z^{-1}e^{-E(\omega)/T}$ (où Z est une constante de normalisation) par le fait que ces mesures minimisent l'*énergie libre* $U - TS$, où U et S sont respectivement l'énergie et l'entropie d'une configuration, définies par

$$U(\pi) = \sum_{\omega\in\Omega} E(\omega)\pi(\omega) \quad \text{et} \quad S(\pi) = -\sum_{\omega} \log \pi(\omega)\pi(\omega)$$

et T est un paramètre assimilé à la température. Quand Ω est infini, la "bonne" définition d'une mesure de Gibbs est moins claire ; on peut donc commencer par la spécifier sur les ensembles cylindriques, qui sont déterminés par un nombre fini de points, mais il n'est pas clair que cela définit une mesure, ni que cela la définit uniquement.
On étudiera la construction d'une mesure de Gibbs par cette méthode, et on prouvera que cette mesure est unique en montrant qu'elle minimise encore une quantité analogue au $U - TS$ ci-dessus. Tout cela est détaillé dans le chapitre 1 du livre de Bowen "equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms", et sera l'occasion d'apprendre un peu de théorie ergodique.

26 Produits aléatoires de matrices

Yan Pautrat – yan.pautrat@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
On considère des suites de variables aléatoires $(Y_n)_n$ de la forme $Y_n = X_n \times \ldots \times X_1$ où

les $(X_k)_k$ sont des variables i.i.d. à valeurs dans des ensembles de matrices (ce type de variables apparaît par exemple dans l'étude physique des systèmes désordonnés). On peut se poser différents types de questions sur la famille Y_n quand $n \to \infty$: comment évolue la norme $\|Y_n\|$? celle de $\|Y_n x_0\|$ pour x_0 fixé ? comment ce comportement change-t-il quand on modifie la distribution des $(X_k)_k$? le vecteur $Y_n x_0$ a une direction aléatoire, celle-ci converge-t-elle en loi ? en fonction des goûts et connaissances des étudiants, on pourra étudier l'une ou l'autre de ces questions. On y apprendra sans doute un peu (voire un peu plus que ça) de théorie ergodique. On se basera en particulier sur le livre de Bougerol et Lacroix "products of random matrices and applications to random Schrödinger operators".

27 Introduction à l'Estimation Non-Paramétrique

Thanh Maï Pham Ngoc – thanh.pham$_n goc@math.u-psud.fr$
Niveau : M1
L'estimation statistique est classiquement abordée dans un contexte paramétrique, l'objet à estimer se trouve dans un espace fini dimensionnel. Cette approche traditionnelle ne rend pas toujours bien compte de la complexité de l'objet sous-jacent et ne fournit qu'une approximation souvent imprécise. Dès lors pour palier cette imprécision, il convient de considérer des modèles plus complexes, permettant de prendre en compte des objets vivant dans des classes fonctionnelles plus massives. L'estimation non-paramétrique connaît un essor très important depuis une vingtaine d'années. A partir d'observations, elle s'attache à estimer une fonction inconnue appartenant à une classe infinie dimensionnelle.
Ce sujet de mémoire porte sur l'étude du premier chapitre intitulé "Estimateurs non-paramétriques" du livre d'Alexandre Tsybakov *Introduction à l'estimation non-paramétrique*. Il s'agit là comme son nom l'indique d'une introduction à l'estimation non-paramétrique qui nécessite les bases de probabilités de L3, des notions d'analyse et de convergence dispensées en L2. Seront abordées les grandes méthodes d'estimation non-paramétriques à savoir les estimateurs à noyaux et les estimateurs par projection.
Par ailleurs, s'il le souhaite l'étudiant pourra illustrer son étude théorique par quelques simulations qui pourront être menées par exemple à l'aide du logiciel R.

Références

[1] Tsybakov A. (2004) *Introduction à l'estimatio non-paramétrique*, Mathématiques et Application Vol. 41, Springer.

28 Les ondelettes et quelques applications statistiques.

Thanh Maï Pham Ngoc – thanh.pham$_{n}goc@math.u-psud.fr$

Niveau : M1

Les ondelettes sont des outils mathématiques très usités dans de nombreux domaines tels que le traitement du signal, d'images, l'estimation statistique, la compression de données etc. Ces fonctions d'approximation permettent une excellente localisation en temps et en espace contrairement à la base de Fourier. Ce TER vise a étudier la construction mathématique des ondelettes en partant des plus simples (base de Haar) à celles plus sophistiquées (ondelettes à support compact) et ce à partir de notions d'analyse harmonique. On verra quelques applications statistiques des ondelettes et on s'attellera éventuellement à une mise en oeuvre des ondelettes en pratique sous Scilab ou un autre langage par exemple. Le travail s'appuiera sur la lecture de l'ouvrage de Härdle W., Kerkyacharian G., Picard D., Tsybakov A. Wavelets, Approximations and Statistical Applications. Lecture Notes in Statistics, v129, Springer, New York.

29 Nombre de rotation des homéomorphismes du cercle

Sylvie Ruette – sylvie.ruette@math.u-psud.fr

Niveau : L3

Soit $S = \{e^{i\theta} \mid \theta \in\}$ le cercle unité dans . Une application continue $f\colon S \to S$ définit un système dynamique de la façon suivante : à tout point $x_0 \in S$, on associe ses itérés par f : $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n), \ldots$. Par exemple, la rotation d'angle α est l'application $R_\alpha\colon S \to S$ définie par $R_\alpha(e^{i\theta}) = e^{i(\theta+\alpha)}$. En itérant R_α en partant d'un point x_0, on obtient une suite de points x_n qui tourne d'un angle α à chaque itération.
Si f est un homéomorphisme préservant l'orientation, on considère l'angle moyen de rotation des itérés de x_0 et on définit le nombre de rotation comme étant la limite de cet angle moyen. En fait, tous les points ont le même nombre de rotation, noté $\rho(f)$, et l'homéomorphisme a une certaine ressemblance avec la rotation d'angle $\rho(f)$. On étudiera les propriétés liées au nombre de rotation.
On pourra éventuellement prolonger le projet par l'étude des nombres de rotation pour des applications f qui ne sont pas des homéomorphismes.

Référence : R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley, 1987. Section 1.14.

30 Application du théorème de Baire : Prolongement continue d'une fonction

Hans-Henrik Rugh – Hans-Henrik.Rugh@math.u-psud.fr
Niveau : M1
Soit (E, d) un espace métrique complet et $Q \subset E$ un sous-ensemble dense. Rappellons qu'un G_δ est une intersection dénombrable d'ouverts denses. Soit $f : Q \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur Q. Montrer que si Q n'est pas un G_δ on peut toujours prolonger f continument sur un ensemble strictement plus grand que Q.
Décrire une preuve et donner des exemples. Montrer également que si Q est un G_δ on peut construire une fonction continue sur Q non-prolongeable à un ensemble strictement plus grand.
Discuter l'exemple suivant : Si $E =]0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$ (espace non-complets) et $f : \mathbb{Q} \cap E \to \mathbb{R}$ est continue, est-ce que on peut prolonger f sur un ensemble strictement plus grand ?
Références : Notes qui seront fournies + internet.

31 Le Théorème du Poincaré-Bendixson

Hans-Henrik Rugh – Hans-Henrik.Rugh@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
On considère le comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle ordinaire dans le plan ^{2}. Assez surprenant avec le théorème du Poincaré-Bendixson on peut catégoriser tous ces comportements.
Expliquer la preuve et donner des exemples de ces comportements. Montrer aussi avec un exemple sur le tore pourquoi c'est important que l'on se trouve dans le plan.
Références : Hasselblatt and Katok : Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems ou wikipedia + leurs références.

32 Théorème de Perron-Frobenius et la métrique de Hilbert

Hans-Henrik Rugh – Hans-Henrik.Rugh@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Le fameux théorème de Perron-Frobenius dit qu'une matrice carrée A avec tout élément strictement positif possède une valeur propre simple, strictement plus grande que la valeur absolue de toute autre valeur propre. Le but de ce mémoire est d'aborder une démonstration qui utilise que A induit une contraction stricte de la métrique projective d'Hilbert.

Des notes pour comprendre la preuve (courte) seront fournies et la connaissance de la géométrie projective n'est pas un prérequis.

33 Unicité du développement en série trigonométrique et ensembles de Cantor

Julien Sabin – julien.sabin@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
La théorie des séries de Fourier donne des conditions sous lesquelles une fonction peut se développer en série trigonométrique. Une question que l'on peut se poser est : ce développement est-il unique ? Autrement dit, si deux séries trigonométriques coïncident en tout point, leurs coefficients sont-ils égaux ? Ce problème a été résolu (par l'affirmative) par Cantor en 1870. Le but de ce projet est de comprendre la preuve (élémentaire) de Cantor, et, si le temps le permet, de considérer une question plus faible : si deux séries trigonométriques coïncident uniquement presque partout, leurs coefficients sont-ils égaux ? Etonnamment, la réponse est cette fois-ci négative, et les contres-exemples reposent sur les ensembles de Cantor.

34 Classification des surfaces compactes sans bord

Anne Vaugon – anne.vaugon@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Description du projet : L'objectif de ce projet est de lire l'article du site de topologie algébrique *Analysis Situs* intitulé *Classification des surfaces triangulées équipées de fermetures éclair*. Il s'agit de décrire toutes les surfaces compactes sans bord en les découpant en pièces élémentaires, plus précisément on montre que toute surface compacte sans bord est homéomorphe à l'une des surfaces suivantes :

1. la somme connexe de la sphère et d'un nombre fini d'anses ;
2. la somme connexe de la sphère et d'un nombre fini non nul de calottes croisées.

Il s'agit d'une preuve pour amateurs de topologie et de géométrie mais qui ne nécessite pas de connaissances particulières en topologie algébrique. Elle est accessible au niveau L3 mais s'intègre probablement mieux dans le parcours de M1.
Références : http ://analysis-situs.math.cnrs.fr/Classification-des-surfaces-triangulees-equipees-de-fermetures-eclair.html

35 Etude de l'équation de Burger

Claude Zuily – claude.zuily@math.u-psud.fr
Niveau : M1
L'équation de Burger est une équation aux dérivées partielles du premier ordre mais non linéaire. Elle a servi dans l'étude de la dynamique des gaz et sert aussi couramment comme modèle à des situations plus complexes. On se propose ici de la résoudre dans le cadre des fonctions de type ^{k} (par la méthode des caractéristiques) mais aussi dans les espaces de Sobolev (par des méthodes d'analyse fonctionnelle).
Ce sujet s'adresse plutôt à des étudiants qui ont suivi le cours "Distributions et EDP" au premier semestre.

36 Modélisation des ondes de surface

Claude Zuily – claude.zuily@math.u-psud.fr
Niveau : L3 ou M1
Il s'agit dans ce stage d'étudier la modélisation des vagues d'eau produites par l'action du vent, de la lune, par une éruption volcanique ou un tsunami. Cette modélisation fait intervenir un système d'équations aux dérivées partielles assez compliqué mais dont des approximations simples peuvent être résolues et fournir des informations qualitatives pertinentes sur ces vagues. Ces travaux sont dûs à Euler, Cauchy, Poisson, Lagrange ..
Le support initial du travail est un manuscrit d'un quinzaine de pages.