

Topologie différentielle

Patrick Massot

2016

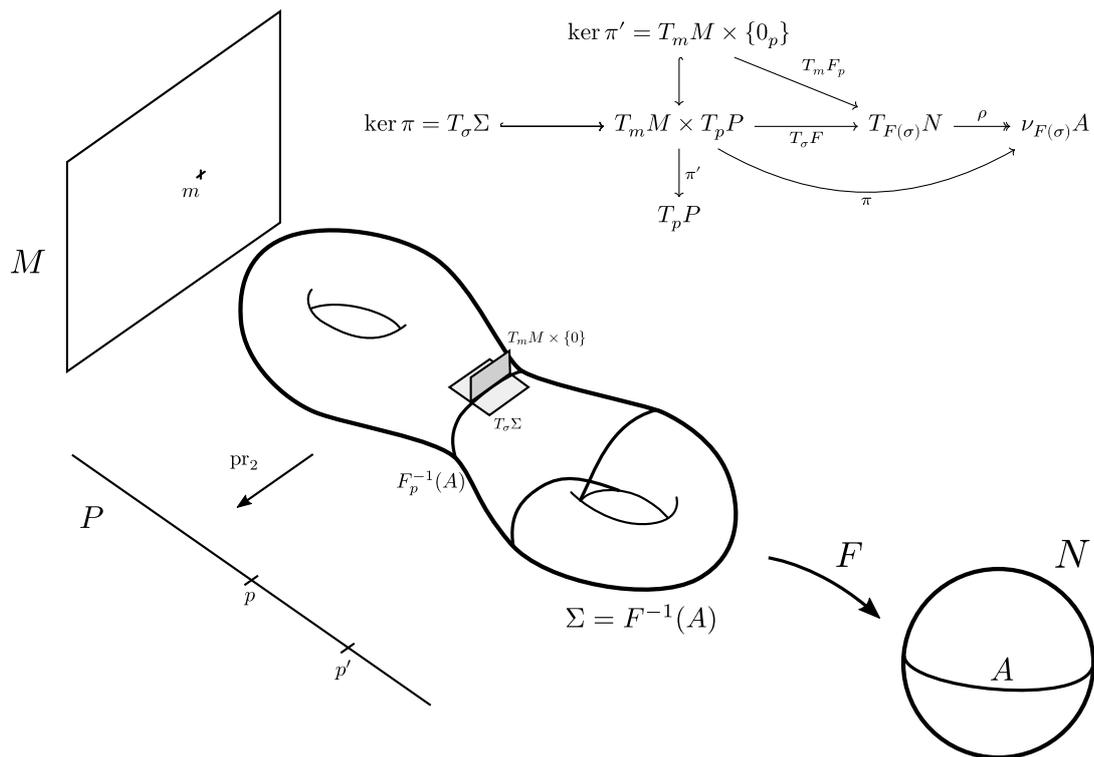


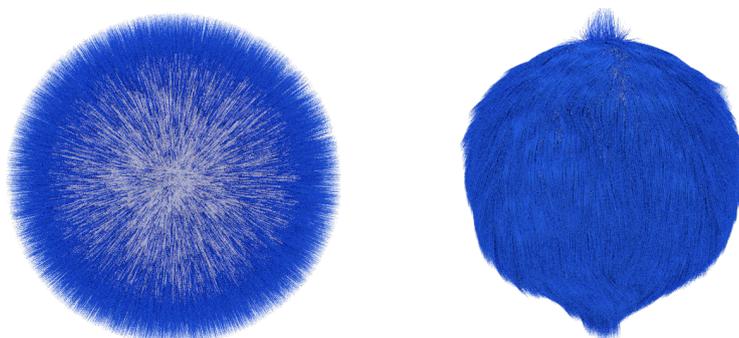
Table des matières

1. Variétés différentiables	9
1.1. Variétés et sous-variétés	9
1.2. Applications différentiables	11
1.3. Quotients et recollements	12
1.3.1. Quotient par une action propre et libre	12
1.3.2. Recollements	14
1.4. Exercices	14
2. Fibrés	17
2.1. Espaces fibrés	17
2.2. Foncteur tangent	19
2.3. Opérations sur les fibrés vectoriels	22
2.4. Orientations	23
2.5. Exercices	23
3. Sous-variétés et plongements	25
3.1. Partitions de l'unité et plongements	25
3.2. Voisinages tubulaires	27
3.3. Variétés à bord	29
3.4. Exercices	31
4. Transversalité	33
4.1. Transversalité et images réciproques	33
4.2. Théorème de Sard	35
4.3. Théorème de transversalité de Thom	37
4.4. Théorie de l'intersection	41
4.5. Exercices	43
5. Théorie de Morse	45
5.1. Hessienne	45
5.2. Fonctions de Morse	47
5.3. Pseudo-gradients	50
5.3.1. Lemme de descente des valeurs critique	52
5.3.2. Lemme de modification des nappes	54
5.4. Fonctions de Morse ordonnées et scindements de Heegaard	54
6. Formes différentielles et intégration	57
6.1. Applications multilinéaires	59

Table des matières

6.2. Formes différentielles	60
6.2.1. Définition	60
6.2.2. Image réciproque	61
6.2.3. Formes différentielles à support compact	62
6.3. Intégration	62
6.4. Dérivée extérieure et formule de Stokes	65
6.4.1. Dérivée extérieure sur un espace affine	65
6.4.2. Théorème des accroissements finis et formule de Stokes	72
6.4.3. Dérivée extérieure sur une variété	74
6.5. Exercices	76
7. Cohomologie de de Rham	79
7.1. Rudiments d'algèbre homologique	80
7.2. Cohomologie de de Rham	81
7.3. Cohomologie à support compact	85
7.4. Exercices	85
8. Suites exactes longues en cohomologie	89
8.1. Suites exactes courtes et longues	90
8.2. Suite exacte de Mayer-Vietoris	95
8.3. Suite exacte des paires de variétés	97
8.4. Exercices	99
9. Finitude, dualité et produits	101
9.1. Le lemme des cinq	101
9.2. Variétés de type fini	103
9.3. Dualité de Poincaré	105
9.4. Théorème de Künneth	108
10. Intersection en cohomologie de de Rham	111
10.1. Intersection et dualité de Poincaré	111
10.2. Formule de décomposition de la diagonale	116
10.3. Théorème de Lefschetz	118
A. Rappels de topologie	119
B. Rappels de géométrie et calcul différentiel	121
B.1. Actions de groupe	121
B.2. Formes quadratiques	122
B.3. Applications différentiables entre espaces affines	122

La topologie différentielle est l'étude des propriétés globales d'espaces localement modélés sur \mathbb{R}^n en s'appuyant sur le calcul différentiel. Parmi les premiers résultats de cette théorie, le plus célèbre est probablement le théorème de la boule chevelue de Brouwer : il est impossible de peigner continûment une sphère de dimension deux sans faire d'épi.



La sphère de dimension deux est localement constituée de morceaux de plans \mathbb{R}^2 déformés. Depuis Riemann, on dit qu'il s'agit d'une variété. Il est bien sûr possible de peigner un plan sans épi donc le théorème de la boule chevelue n'est pas un résultat local. De plus il n'a rien à voir avec la géométrie de la sphère, on peut déformer la sphère sans changer la conclusion : un ballon de rugby n'est pas plus peignable qu'un ballon de football. Par contre il est facile de peigner une bouée. Pour achever de se convaincre de la subtilité de ce théorème, il est instructif de chercher à peigner une boule en ne faisant qu'un seul épi et non deux comme lors de la plupart des premières tentatives.



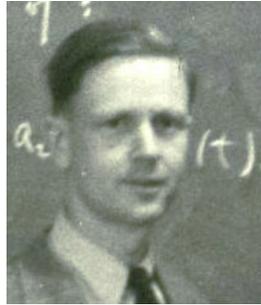
Bernhard Riemann



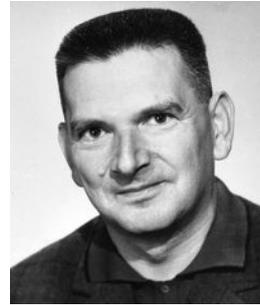
Luitzen Brouwer

En termes un peu plus précis, le théorème affirme qu'il n'y a pas de champ de vecteurs (continu) sur la sphère \mathbb{S}^2 partout tangent à la sphère et qui ne s'annule pas. Une façon de démontrer ce théorème consiste à considérer un chemin X_t de champs de vecteurs entre un modèle X_0 qui s'annule aux pôles et un hypothétique champ X_1 ne s'annulant nulle part. Le point crucial est que, quitte à perturber très légèrement ce chemin, on peut supposer que l'ensemble des paires (q, t) dans $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ telles que $X_t(q) = 0$ est une courbe compacte orientée qui rentre dans $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$ le long de $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ aux pôles.

Cette courbe est réunion de cercles (déformés) et d'arcs allant du bord au bord. Les arcs qui rentrent n'ont nulle part où sortir car X_1 ne s'annule nulle part et on obtient une contradiction.



Hassler Whitney



René Thom

Pour faire fonctionner cette stratégie, il est crucial de commencer par approcher X_1 par un champ de vecteurs lisse et d'utiliser un chemin X_t lisse. C'est ce qui permet la perturbation évoquée plus haut. Cela fournit la première explication du mot « différentielle » dans le titre. La technologie fournissant la perturbation, due à Whitney et Thom, sera développée au chapitre 4, sommet de la première partie de ce cours.

Pour aborder une autre façon dont le calcul différentiel permet d'explorer la forme globale d'un espace, il est utile de contempler la cascade d'Escher. Dans cette image,



La cascade d'Escher

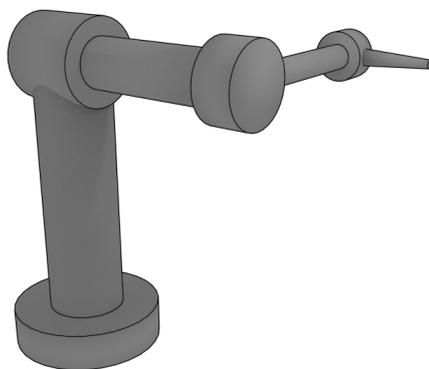


Georges de Rham

l'eau s'écoule vers le bas. D'un point de vue mathématique, on dit qu'elle suit le champ de vecteurs de gradient de la fonction altitude, vu comme partant de la projection S du cours d'eau sur un plan et à valeur dans \mathbb{R} . Le problème est qu'il n'y a pas de fonction

d'altitude permettant d'expliquer ce dessin. En tout point du cours d'eau, il n'y a pas d'obstruction locale à l'existence d'une telle fonction. Le problème ne se manifeste que lorsqu'on fait tout le tour en essayant de suivre la fonction d'altitude. On remarque aussi qu'il semble difficile d'étendre le dessin au milieu sans faire apparaître de problème local. Il est crucial que la source S de la fonction impossible soit un cercle épaissi et déformé.

L'existence d'un champ de vecteurs qui est localement mais pas globalement le gradient d'une fonction est donc une trace de la forme globale de l'espace dans le monde du calcul différentiel. C'est le début de la cohomologie de de Rham étudiée dans la seconde partie du cours. Une différence cruciale avec les méthodes évoquées pour démontrer le théorème de la boule chevelue est qu'on peut additionner des champs de vecteurs qui sont localement gradient d'une fonction (ou, plus généralement, des formes différentielles fermées) et quotienter par le sous-espace de ceux qui le sont globalement. On obtient ainsi des espaces vectoriels et pas seulement des nombres. De plus, toute application entre variétés induit une application linéaire entre ces espaces de cohomologie de de Rham, de façon compatible avec la composition : on parle de théorie fonctorielle. Voici un exemple de résultat concret accessible grâce à la functorialité de la cohomologie de de Rham. On considère un bras robotique doté de n articulations le long desquelles il peut tourner, soit complètement soit dans un intervalle de directions. La configuration du bras est donc un point de $M = (\mathbb{S}^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ (en fait n'importe quel espace de configuration localement homéomorphe à \mathbb{R}^n donnerait la même conclusion à cette discussion). La direction du dernier segment du bras vit dans une sphère \mathbb{S}^2 . On a donc une application continue $f: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ donnant la direction en fonction de l'état des articulations. Sauf en cas de conception stupide du bras, cette application est surjective. L'application f admet donc un inverse à droite $g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{T}^n : f \circ g = \text{Id}$. La question subtile est l'existence d'un inverse



Une application surjective de \mathbb{T}^3 dans \mathbb{S}^2

à droite continu : peut-on continûment choisir pour chaque direction une configuration des articulations ? La réponse est non car l'application f se factorise via le groupe $\text{SO}(3)$ dont la cohomologie de de Rham en degré deux est nulle alors que celle de \mathbb{S}^2 n'est pas nulle. Ce résultat est un raffinement du théorème de la boule chevelue, comme l'indique l'exercice du chapitre 8 discutant cet exemple robotique.

Voici maintenant quelques commentaires sur ce cours et suggestions de lectures. La spécificité la plus visible de ce cours est d'accompagner un cours oral d'un volume horaire très réduit et destiné à des étudiants ayant déjà de solides capacités d'abstraction. Les chapitres 5 et 10, qui concluent respectivement la première et la seconde partie, n'étaient pas destinés à être discutés oralement mais à servir d'ouverture. Même en tenant compte de cela, un grand nombre de concepts abstraits sont abordés en peu de temps et la plupart des exemples et applications sont relégués dans les exercices ; c'est le cas de tous les résultats évoqués dans cette introduction. Il est donc indispensable de se pencher sur ces exercices.

Chaque notion est présentée à la fois par une discussion informelle et par une définition mathématique précise. Il importe de bien faire le lien entre les deux approches. Un autre point crucial est d'être sensible à l'aspect fonctoriel de la théorie, c'est à dire au glissement subtil du centre de l'attention depuis les objets vers les flèches (les applications) entre les objets. Pour prendre un exemple qui, initialement, peut sembler extrême, lorsqu'une variété A est incluse dans une autre B , il y aura presque toujours quelque chose à gagner en considérant l'application d'inclusion $\iota_A : A \rightarrow B$. Une autre habitude importante liée à la fonctorialité est celle de considérer les objets en famille : une famille de variétés est une application $p : E \rightarrow B$ telle que chaque $E_b = p^{-1}(b)$ est une sous-variété de E . On a ainsi une famille E_b paramétrée par B . Une famille d'applications des E_b vers une autre variété M est une application $F : E \rightarrow M$ pensée comme la famille de ses restrictions F_b aux E_b .

Les références standard internationales sur les sujets abordés sont le petit livre introductif de John Milnor *Topology from the differentiable viewpoint* et le livre de Morris Hirsch *Differential topology* pour la première partie et le livre de Raoul Bott et Loring Tu *Differential forms in algebraic topology* pour la seconde. Ces deux derniers livres vont plus loin que le présent cours dans un certain nombre de directions et peuvent ainsi être vus comme prolongements naturels. Le livre de Jacques Lafontaine *Introduction aux variétés différentiables* est une référence standard en France pour apprendre les bases de la théorie des variétés de façon moins compressée qu'ici.

L'exposition de la transversalité dans ce cours doit bien plus à l'approche de François Laudenbach qu'à celle de Hirsch et on consultera avec profit son livre *Transversalité, courants et théorie de Morse* correspondant au cours de topologie différentielle de l'X dans les années 90 ainsi que ses notes d'exposé *De la transversalité de Thom au principe de Gromov*. L'exposition de la dérivée extérieure des formes différentielles suit l'excellent livre de Vladimir Arnold *Mathematical Methods of Classical Mechanics* en ajoutant les démonstrations. La démonstration de la formule de Stokes via le théorème des accroissements finis pour les formes différentielles plutôt que par une réduction à la dimension 1 provient de l'article *The missing link* de Felipe Acker. La formule de Stokes est aussi l'héroïne du roman *La formule de Stokes, roman* de Michèle Audin dont on pourra lire aussi l'article *Cartan, Lebesgue, de Rham et l'analysis situs dans les années 1920 – Scènes de la vie parisienne*. Le livre *Algebraic topology* d'Allen Hatcher est probablement la meilleure introduction à la topologie algébrique hors cohomologie de de Rham.

1. Variétés différentiables

L'objectif de ce chapitre est de définir les variétés, une classe d'espaces qui ressemblent localement à un espace affine et sur lesquels il est possible de faire du calcul différentiel. L'idée de base, introduite dans la section 1.1, est très simple, on considère des espaces topologiques munis d'une famille d'identifications locales avec \mathbb{R}^n soumises à une condition garantissant qu'une application qui est différentiable du point de vue d'une de ces identifications l'est du point de vue de toutes les autres. Ces objets généralisent les sous-variétés de \mathbb{R}^n , peut-être déjà croisées en MAT431 ou MAT452¹ qui fournissent donc les premiers exemples. La section 1.2 introduit les applications différentiables entre variétés et la relation fructueuse liant ces applications aux sous-variétés.

La mise en place des définitions (qui continuera dans le chapitre suivant) est un peu lourde mais, en pratique, il est rare d'utiliser directement ces définitions, de même qu'il est rare de penser à la définition de l'intégration ou même à la construction des nombres réels. Il est bien plus important d'avoir des outils permettant de manipuler ces objets ainsi qu'un stock d'exemples permettant de se forger une intuition. C'est pourquoi la section 1.3 est consacrée à deux outils permettant de construire des exemples qui ne sont pas de façon évidente des sous-variétés de variétés déjà connues.

1.1. Variétés et sous-variétés

Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique séparé et σ -compact dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .

Remarquons tout de suite que le cœur de cette définition est l'hypothèse d'homéomorphisme local avec \mathbb{R}^n . Les hypothèses de séparation et de σ -compacité sont techniques, elles visent principalement à garantir l'existence de partitions de l'unité (théorème 3.1 du chapitre 3). Elles peuvent être ignorées puis remplacées, au moins psychologiquement, par la conclusion de ce théorème. En pratique, la σ -compacité est toujours gratuite, mais la séparation doit parfois être vérifiée soigneusement.

La définition de variété topologique n'est pas suffisante pour faire du calcul différentiel. Par exemple, étant donné une fonction f d'une variété topologique X dans \mathbb{R} , on peut avoir deux homéomorphismes locaux φ et ψ d'un ouvert de X vers \mathbb{R}^n tels que $f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable mais pas $f \circ \psi^{-1}$.

Un homéomorphisme d'un ouvert d'une variété topologique X vers un ouvert de \mathbb{R}^n est appelé *carte* de X . Un *atlas* de X est une famille de cartes dont les domaines de définition recouvrent X .

1. aucun de ces cours n'est pas un prérequis

1. Variétés différentiables

Soit $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ un atlas d'une variété topologique. Les *changements de cartes* de \mathcal{A} sont les homéomorphismes $\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$, cf. Figure 1.1. Ce sont des homéomorphismes entre ouverts de \mathbb{R}^n .

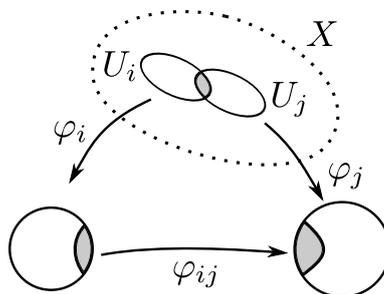


FIG. 1.1. : Changement de carte

Un *atlas lisse* est un atlas dont tous les changements de cartes sont des difféomorphismes de classe C^∞ . Deux atlas lisses sont équivalents si leur réunion est encore un atlas lisse.

Définition 1.1. Une *variété différentiable* (de classe C^∞) est une paire (X, Σ) où X est une variété topologique et Σ est une classe d'équivalence d'atlas lisses sur X .

Il est important de noter qu'une variété topologique est un espace topologique vérifiant certaines *propriétés* tandis qu'une variété différentiable est un espace topologique muni d'une *structure supplémentaire*. On montre facilement qu'un espace topologique peut porter deux structures de variétés différentiables différentes. Même une fois mis en place la notion d'isomorphisme de variétés différentiables, on peut montrer, difficilement, qu'un même espace topologique peut porter plusieurs structures de variétés différentiables non isomorphes.

Ceci étant dit, il est quasiment systématique de sous-entendre la structure différentiable dans les notations. En particulier on appelle simplement carte de X toute carte faisant partie d'un atlas lisse représentant la structure différentiable de X . Dans toute la suite, le mot variété (sans précision) désigne une variété différentiable de classe C^∞ .

Bien sûr les premiers exemples de variétés sont les ouverts de \mathbb{R}^n (sous-entendu : munis de la classe d'équivalence de l'atlas constitué de l'identité comme seule carte). La façon la plus concrète de produire de nouveaux exemples provient de la définition suivante.

Définition 1.2. Une *partie Y d'une variété X* est une *sous-variété de codimension k* si tout point de Y est contenu dans le domaine d'une carte $\varphi : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(Y \cap U) = \varphi(U) \cap (\mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ (cf. Figure 1.2).

La proposition suivante est évidente mais cruciale car elle fournit de nombreux exemples de variétés. On montrera même au chapitre 3 que, en un sens, elle les fournit tous.

Proposition 1.3. Soit Y une sous-variété d'une variété X . Tout atlas lisse sur X induit par restriction un atlas lisse sur Y . Deux tels atlas sont équivalents et définissent donc une structure de variété sur Y .

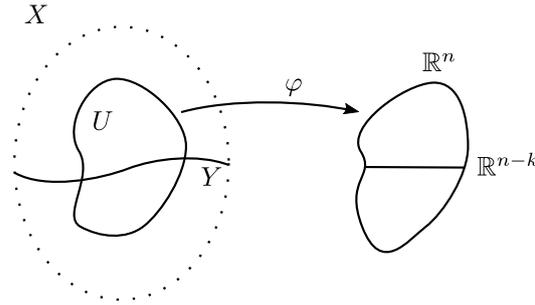


FIG. 1.2. : Définition des sous-variétés

1.2. Applications différentiables

Comme espéré, la définition de variété différentiable permet de définir les applications différentiables.

Définition 1.4. Une application $f: X \rightarrow Y$ entre deux variétés est différentiable si, pour tout x dans X , il existe des cartes $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ autour de x et $f(x)$ respectivement, telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est différentiable. On dit que f est lisse si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^∞ .

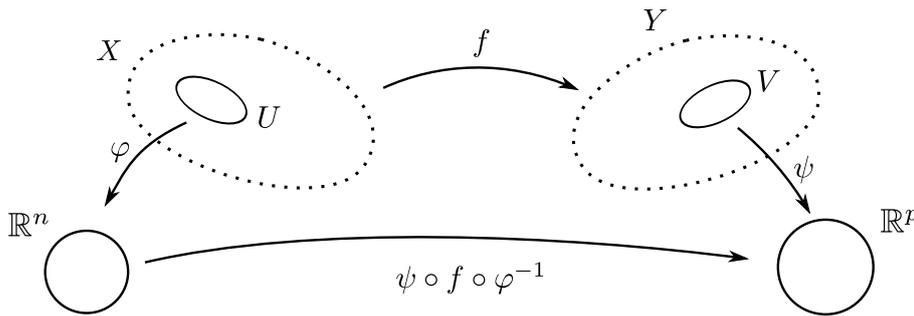


FIG. 1.3. : Définition des applications différentiables

Dans la définition précédente, la différentiabilité des changements de cartes de X et Y assure que les choix de φ et ψ n'ont pas d'importance. De même, le rang de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(x)$ est indépendant de ces choix, il est appelé *rang* de f en x et noté $\text{rg}_x f$. On peut aussi définir ainsi les applications de classe C^k entre deux variétés lisses. Sauf mention explicite du contraire, toutes les applications entre variétés seront supposées lisses.

Définition 1.5. Une application différentiable f d'une variété de dimension n dans une variété de dimension p est appelée

- une immersion si son rang vaut partout n ;
- une submersion si son rang vaut partout p ;

1. Variétés différentiables

- un difféomorphisme local si son rang vaut partout n et p .

Un difféomorphisme entre deux variétés est une application lisse bijective dont la réciproque est aussi lisse. Un plongement d'une variété N dans une variété M est une immersion f qui est un homéomorphisme sur son image. On le note $f: M \hookrightarrow N$.

Le théorème d'inversion locale montre que les difféomorphismes sont exactement les difféomorphismes locaux bijectifs. Les difféomorphismes d'une variété X dans elle-même forment un groupe noté $\text{Diff}(X)$.

Remarque 1.6. On vérifie facilement que deux structures de variété différentiable Σ et Σ' sur une même variété topologique M sont égales si et seulement si l'identité de M est lisse comme application de (M, Σ) dans (M, Σ') et comme application de (M, Σ') dans (M, Σ) .

Proposition 1.7. Une partie A d'une variété X est une sous-variété de codimension k si et seulement si elle est localement définie par une submersion à valeur dans \mathbb{R}^k : pour tout x dans A , il existe un ouvert U contenant x et une submersion $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ telle que $A \cap U = f^{-1}(0)$.

Démonstration. Pour alléger les notations, on pose $H = \mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}$ et $V = \{0\} \times \mathbb{R}^k$. On note $x = x_H + x_V$ la décomposition d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n = H \oplus V$.

L'un des deux sens est évident. En effet, si A est une sous-variété de X alors, par définition, tout point de A est contenu dans le domaine d'une carte $\varphi: U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(A \cap U) = \varphi(U) \cap H$. On peut alors choisir comme f la composée de φ et de la projection de \mathbb{R}^n sur V parallèlement à H .

L'autre sens, le plus utile en pratique, est une conséquence du théorème d'inversion locale. Quitte à rétrécir U parmi les ouverts contenant x , on peut supposer qu'il existe une carte $\varphi_0: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'hypothèse de submersion signifie que la différentielle de $F := f \circ \varphi_0^{-1}$ est surjective. Quitte à composer φ_0 par une application linéaire inversible, et à réduire encore un peu U , on peut supposer que la restriction de DF à V est un isomorphisme. On définit alors Ψ de $\varphi_0(V)$ dans \mathbb{R}^n par $\Psi(x) = x_H + F(x)_V$. Il s'agit d'un difféomorphisme local car sa différentielle vaut $\begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ \star & DF|_V \end{pmatrix}$ qui est inversible. La carte recherchée est alors $\varphi = \Psi \circ \varphi_0$, après un ultime rétrécissement de U . Elle vérifie $\varphi(U \cap A) = \varphi(U) \cap H$ par construction. \square

1.3. Quotients et recollements

Le but de cette section est de permettre la construction d'exemples de variétés sans revenir à la définition et sans savoir les plonger a priori comme sous-variétés d'exemples déjà connus.

1.3.1. Quotient par une action propre et libre

Soit G un sous-groupe du groupe $\text{Diff}(M)$ des difféomorphismes d'une variété M . Le quotient M/G est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation qui identifie x et

$g(x)$ pour tout x dans M et g dans G . On dit que G agit *proprement* sur M si, pour tout compact K de M , l'ensemble des g dans G envoyant K sur un ensemble l'intersectant $(g(K) \cap K \neq \emptyset)$ est fini. On dit que G agit *librement* sur M si, pour tout x dans M , le seul élément g de G vérifiant $gx = x$ est l'identité.

Théorème 1.8. *Si un groupe de difféomorphismes $G \subset \text{Diff}(M)$ agit proprement et librement alors il existe une unique structure différentiable sur M/G telle que la projection $p : M \rightarrow M/G$ soit un difféomorphisme local. En particulier M et M/G ont même dimension.*

Lemme 1.9. *Si $G \subset \text{Diff}(M)$ agit proprement alors $\mathcal{O} := \{(x, gx); x \in M, g \in G\}$ est fermé dans $M \times M$. Si de plus G agit librement alors tout x dans M admet un voisinage U déplacé par tous les éléments non-triviaux de $G : gU \cap U = \emptyset$ dès que $g \neq \text{Id}$.*

Démonstration. Soit $(x_k, g_k x_k)$ une suite d'éléments de \mathcal{O} qui converge vers (x, x') dans $M \times M$. Soient K et K' des voisinages compacts de x et x' respectivement. Tous les g_k pour k suffisamment grand vérifient que $g(K \cup K')$ intersecte $K \cup K'$. Par hypothèse de propriété de l'action, la suite g_k ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs. Quitte à extraire, elle est donc constante : $g_k = g$. On a alors $x' = \lim gx_k = gx$ donc (x, x') est dans \mathcal{O} .

Supposons en outre l'action libre. Si x dans M n'admet pas de voisinage déplacé alors il existe une suite g_k dans $G \setminus \text{Id}$ et une suite de points x_k tendant vers x tels que $g_k x_k$ tende vers x . Soit K un voisinage compact de x . Quitte à oublier un nombre fini de termes, tous les x_k et les $g_k x_k$ sont dans K donc $g_k(K)$ intersecte K pour tout k . Par hypothèse de propriété, la suite g_k n'a qu'un nombre fini de termes, donc un seul après extraction. On note g cet élément. Comme gx_k tend vers x , $gx = x$, ce qui contredit l'hypothèse de liberté. \square

Démonstration du Théorème 1.8. On montre d'abord que le quotient est un espace topologique séparé. Soient $p(x)$ et $p(y)$ deux éléments distinct de M/G . Par définition, (x, y) n'est pas dans l'ensemble \mathcal{O} du lemme 1.9. Comme ce dernier est fermé, il existe des voisinages U et V de x et y respectivement tels que $U \times V$ n'intersecte pas \mathcal{O} . Par définition de \mathcal{O} , cela signifie que GU n'intersecte pas V . Par suite GU et GV ne s'intersectent pas et $p(GU)$ et $p(GV)$ sont disjoints. Ils sont ouverts car $p^{-1}(p(GU)) = GU = \bigcup_g gU$ et idem pour V .

La σ -compacité de M/G est claire. On construit maintenant un atlas lisse sur M/G . Soit x un élément de M . La seconde partie du lemme 1.9 fournit un voisinage ouvert U de x déplacé par tous les éléments non-triviaux de G . La restriction de p à U est alors un homéomorphisme, dont on note s l'inverse. Quitte à rétrécir U , celui-ci est contenu dans le domaine d'une carte. On a donc un atlas $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ pour M et des homéomorphismes $s_i : p(U_i) \rightarrow U_i$ tels que $p \circ s_i = \text{Id}$. L'ensemble des $\psi_i = \varphi_i \circ s_i : p(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est alors un atlas de variété topologique pour M/G . Pour chaque composante V_{ijk} de $p(U_i) \cap p(U_k)$, il existe un élément g_{ijk} de G tel que $s_j = g_{ijk} s_i$ sur V_{ijk} . Donc $\psi_j \circ (\psi_i)^{-1} = \varphi_j \circ g_{ijk} \circ (\varphi_i)^{-1}$ est un difféomorphisme.

1. Variétés différentiables

L'unicité de la structure différentiable sur M/G découle de la remarque 1.6. Soient Σ et Σ' deux structures différentiables sur M/G pour lesquelles la projection p est un difféomorphisme local. Si $s : p(U) \rightarrow U$ est une section locale de p comme plus haut alors s est un difféomorphisme de $(p(U), \Sigma)$ vers U et p est lisse de U vers $(p(U), \Sigma')$. Donc $\text{Id}|_U = p \circ s$ est lisse de $(p(U), \Sigma)$ vers $(p(U), \Sigma')$. Par symétrie de l'argument, l'identité est aussi lisse de $(M/G, \Sigma')$ dans $(M/G, \Sigma)$. \square

1.3.2. Recollements

La définition de variété présente naturellement toute variété comme espace obtenu en recollant des ouverts de \mathbb{R}^n . La définition suivante formalise cette idée et permet d'aller plus loin en recollant des variétés plus complexes.

Définition 1.10. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une collection de variétés de dimension n . On appelle données de recollement des V_i une paire $((V_{ij})_{i,j \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I})$ où chaque V_{ij} est un ouvert de V_i et chaque φ_{ij} est un difféomorphisme de V_{ij} dans V_{ji} d'inverse φ_{ji} et vérifiant $\varphi_{ij}(V_{ij} \cap V_{ik}) = V_{ji} \cap V_{jk}$ et les relations de cocycle :

$$\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki} = \text{Id}_{V_{ij} \cap V_{ik}}.$$

L'espace topologique V associé à ces données de recollement est le quotient de la réunion disjointe des V_i par la relation d'équivalence reliant tout $x \in V_{ij}$ à $\varphi_{ij}(x)$ (les relations de cocycle assurent qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence).

Proposition 1.11. Dans le contexte de la définition 1.10, lorsque V est séparé et σ -compact, il existe une unique structure de variété sur V pour laquelle toutes les projections $V_i \rightarrow V$ sont des difféomorphismes sur leurs images.

Démonstration. On note π_i la restriction à V_i de la projection canonique $\pi : \sqcup V_i \rightarrow V$ et on note U_i son image.

L'unicité découle de la remarque 1.6. Supposons que Σ et Σ' soient deux structures de variétés lisses comme dans l'énoncé. Par symétrie de la situation, il suffit de montrer que l'identité est lisse de (V, Σ) dans (V, Σ') . Il s'agit d'un énoncé local. Tout point v de V est contenu dans un U_i . Par hypothèse, ces U_i sont ouverts et π_i est un difféomorphisme de V_i sur (U_i, Σ) et (U_i, Σ') . L'identité de U_i est donc la composée des deux applications lisses $\pi_i^{-1} : (U_i, \Sigma) \rightarrow V_i$ et $\pi_i : V_i \rightarrow (U_i, \Sigma')$.

Pour l'existence, on considère sur chaque V_i un atlas $\{(W_i^k, \psi_i^k)\}$ et on équipe V de l'atlas réunion des $\{(\pi(W_i^k), \psi_i^k \circ \pi_i^{-1})\}$. Il s'agit bien d'un atlas lisse car les φ_{ij} sont des difféomorphismes. \square

1.4. Exercices

Exercice 1.1. Montrer la remarque 1.6 : deux structures de variétés Σ et Σ' sur un même espace topologique M sont égales si et seulement si l'identité est lisse de (M, Σ) dans (M, Σ') et inversement.

Exercice 1.2. Soit M_1 et M_2 deux variétés différentiables. Montrer qu'il existe une unique structure de variété différentiable sur $M_1 \times M_2$ telle que les projections $p_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ soient lisses et que, pour toute paire d'applications lisses $f_1 : X \rightarrow M_1$ et $f_2 : X \rightarrow M_2$, l'application $f_1 \times f_2 : x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ soit lisse.

Exercice 1.3. Montrer que la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$ est une sous-variété dimension n de \mathbb{R}^{n+1} .

Montrer que le groupe $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$.

Exercice 1.4. L'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ est l'ensemble des droites vectorielles dans \mathbb{R}^{n+1} . On peut le voir comme quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par le groupe de difféomorphismes $\mathbb{R}^\times = \{x \mapsto \lambda x; \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$. Ce groupe agit-il proprement sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$? Montrer que l'inclusion $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ induit une bijection de $S^n / \{\pm 1\}$ sur $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} / \mathbb{R}^\times$. En déduire l'existence d'une structure de variété différentiable sur $\mathbb{R}P^n$.

On veut maintenant décrire de façon plus intrinsèque un atlas sur chaque espace projectif. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $P(E)$ l'espace projectif des droites de E . À chaque hyperplan H de E est associé l'ouvert U_H des droites Δ de E transversales à H (i.e. $E = H \oplus \Delta$). Cet ouvert est canoniquement un espace affine dirigé par $L(E/H, H)$: on note π_H la projection $E \rightarrow E/H$ et on définit l'action de $L(E/H, H)$ par $u \cdot \Delta = \{v + u(\pi_H v); v \in \Delta\}$, c'est à dire que $u \cdot \Delta$ est le graphe de u vu comme application de Δ dans H via π_H . Ainsi chaque décomposition $E = H \oplus \Delta$ fournit une bijection entre un espace vectoriel et $U_H \subset P(E)$. Montrer qu'il existe une unique structure de variété différentiable sur $P(E)$ telle que chacune de ces bijections est un difféomorphisme. Indication : si on choisit un vecteur v dirigeant Δ alors $L(V/H, H)$ s'identifie à H et l'application obtenue de H vers U_H est $h \mapsto \mathbb{R}(v + h)$.

Exercice 1.5. Le tore \mathbb{T}^n est défini comme quotient de \mathbb{R}^n par le sous-groupe de translations \mathbb{Z}^n de $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe une unique structure de variété sur \mathbb{T}^n pour laquelle la projection $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ est une submersion.

Montrer que \mathbb{T}^n est difféomorphe au produit $(S^1)^n$.

Exercice 1.6. Soit G le sous-groupe de $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ engendré par $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ et $(x, y) \mapsto (-x, y + 1)$. Montrer que \mathbb{R}^2/G est une variété et la décrire.

Exercice 1.7. Soit π la projection de \mathbb{R}^2 sur $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. On note M le tore troué $\mathbb{T}^2 \setminus \pi(\bar{D}(0, 1/10))$. On note U l'ouvert $\pi(D(0, 4/10) \setminus \bar{D}(0, 1/10))$ dans M . L'inversion de centre O et de rapport $4/10$ induit un difféomorphisme φ de U . Dessiner la variété obtenue en recollant deux copies de M via φ .

2. Fibrés

Ce chapitre introduit l'étude des variétés fibrées. On peut voir une variété fibrée de deux points de vue complémentaires, soit comme variété munies d'une agréable partition en sous-variétés de dimension plus petite soit comme famille lisse de variétés paramétrée par une variété (la signification précise de cette description se trouve dans la définition 2.1). Le tore \mathbb{T}^2 et la bouteille de Klein croisés dans les exercices du chapitre précédent sont deux exemples de familles de cercles paramétrées par un cercle. Au voisinage de chaque cercle de ces familles, les deux exemples sont indiscernables mais la famille bouteille de Klein est globalement plus complexe.

Un cas particulier à la fois simple et très important est celui d'un fibré vectoriel au-dessus d'une variété M : une famille lisse d'espaces vectoriels paramétrée par M . L'exemple le plus important est celui du fibré tangent à M . Le but est d'associer à chaque x de M un espace vectoriel $T_x M$ de sorte qu'une application lisse de M dans N ait en tout point une différentielle qui soit linéaire de $T_x M$ dans $T_{f(x)} N$. Lorsque M est plongée comme sous-variété d'un espace affine, on peut identifier $T_x M$ au sous-espace affine qui approche le mieux M au voisinage de x (Figure 2.1).

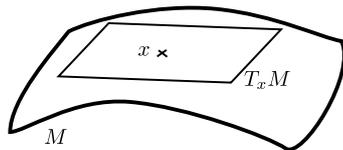


FIG. 2.1. : Espace tangent à une surface dans \mathbb{R}^3

2.1. Espaces fibrés

Définition 2.1. Soit E , B et F des variétés et G un sous-groupe de $\text{Diff}(F)$. Un fibré d'espace total E , de fibre F , de base B et de groupe structural G est une application lisse $p: E \rightarrow B$ telle qu'il existe un recouvrement de B par des ouverts U_i et des difféomorphismes, dits de trivialisations locales, $\Phi_i: p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times F \\
 \searrow p & & \swarrow \text{pr}_1 \\
 & U_i &
 \end{array}$$

et tels que, sur tous les $U_i \cap U_j$, $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(x, v) = (x, \Psi_{ij}(x, v))$ vérifie $\Psi_{ij}(x, \cdot) \in G$ pour tout x .

2. Fibrés

Lorsque F est un espace vectoriel et $G \subset \text{GL}(F)$, on dit que $p: E \rightarrow B$ est un fibré vectoriel de rang $\dim(F)$.

La fibre de p en un point b de B est $p^{-1}(b)$.

Une section d'un fibré $p: E \rightarrow B$ est une application lisse $s: B \rightarrow E$ vérifiant $p \circ s = \text{Id}_B$.

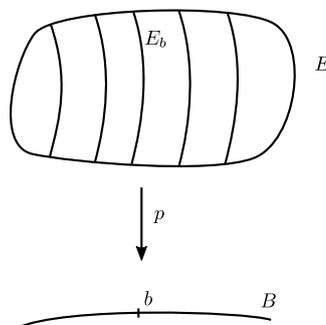


FIG. 2.2. : Une fibration

Dans la pratique, il est utile de disposer de raccourcis de langage et de notations, lorsque qu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté. Lorsque le groupe structural est tout $\text{Diff}(F)$, on omet de le mentionner. On utilise aussi le mot fibré pour désigner l'espace total E , lorsque l'application p est claire dans le contexte, et on note E_b la fibre de p en b . On note $\Gamma(B, E)$ ou même simplement $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections de $p: E \rightarrow B$.

On dit aussi que $p: E \rightarrow B$ est une *fibration localement triviale*. Lorsqu'on veut préciser le groupe G , on utilise aussi le vocabulaire de G -fibré ou G -fibration. Bien sûr, si $G \subset H \subset \text{Diff}(F)$, tout G -fibré est a fortiori un H -fibré.

Exemple 2.2. Pour tout B et F , la première projection $B \times F \rightarrow B$ est un fibré appelé *fibré trivial de base B et de fibre F* .

Un *morphisme de fibrés* entre deux fibrés $p: E \rightarrow B$ et $p': E' \rightarrow B$ au-dessus de B est une application $f: E \rightarrow E'$ entre les espaces totaux qui est compatible avec les projections : $p' \circ f = p$. Un *isomorphisme de fibrés* est un morphisme de fibrés qui est un difféomorphisme. Un léger abus de vocabulaire désigne par fibré trivial tout fibré isomorphe à une projection $B \times F \rightarrow B$ comme dans l'exemple précédent.

Exemple 2.3. À tout difféomorphisme φ d'une variété F , on associe sa *suspension* $\Sigma(F, \varphi)$ défini comme quotient de $F \times \mathbb{R}$ sous l'action du groupe infini cyclique engendrée par $\varphi: (x, t) \mapsto (\varphi(x), t - 1)$. La projection de $F \times \mathbb{R}$ sur $F \times \mathbb{S}^1$ donnée par $(x, t) \mapsto (x, t \bmod \mathbb{Z})$ passe au quotient en fibration localement triviale $\Sigma(F, \varphi) \rightarrow \mathbb{S}^1$ de fibre F et de groupe structural le groupe engendré par φ .

Dans le cas particulier très important des fibrés vectoriels, chaque fibre est munie d'une structure d'espace vectoriel. En effet la structure d'espace vectoriel évidente sur $\{b\} \times F \subset U \times F$ d'une trivialisatation locale Φ_i quelconque est préservée par les changements de

trivialisation $\Psi_{ij}(b, \cdot)$. Par exemple, la suspension d'une application linéaire est un fibré vectoriel. Dans le cas où $F = \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = -x$, on obtient le *ruban de Möbius* (ouvert). Un (iso)-morphisme de fibrés vectoriel est un (iso)-morphisme de fibré qui est linéaire en restriction à chaque fibre.

La méthode de recollement de la section 1.3.2 s'étend au recollements des fibrés. Pour rester simple, on se contente de recoller des fibrés triviaux (mais le fibré recollé ne le sera pas forcément !). Étant donné une collection de variétés V_i et des données de recollement (V_{ij}, φ_{ij}) , on appelle donnée de recollements des $V_i \times F$ pour le groupe $G \subset \text{Diff}(F)$ toute collection d'applications lisses $\theta_{ij} : V_{ij} \times F \rightarrow F$ telles que, pour tout b fixé dans V_{ij} , l'application $f \mapsto \theta_{ij}(b, f)$ soit dans G et les $\Psi_{ij} : V_{ij} \times F \rightarrow V_{ji} \times F$ envoyant (b, f) sur $(\varphi_{ij}(b), \theta_{ij}(b, f))$ vérifient la relation de cocycle. La proposition suivante est une variante facile de la proposition 1.11.

Proposition 2.4. *Des données de recollement de fibrés fournissent un fibré.*

2.2. Foncteur tangent

Dans cette section, on construit comme promis le fibré tangent TM d'une variété M , un fibré vectoriel au-dessus de M permettant de parler de dérivée d'une application f de M dans N comme famille lisse d'applications linéaires $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$. La construction se fait en deux temps. D'abord on définit pour chaque variété M et chaque x dans M un ensemble $T_x M$. On définit aussi pour toute application f entre deux variétés M et N des applications $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$. Toutes ces définitions ne nécessitent aucun choix auxiliaire et sont fonctorielles : la formule $T_x(f \circ g) = T_{g(x)} f \circ T_x g$ est évidente par construction. Dans un deuxième temps on démontre qu'il existe une unique façon de munir TM , la réunion disjointe pour x parcourant M des $T_x M$, d'une structure de fibré vectoriel de sorte que les $T_x f$ se rassemblent en application Tf de TM dans TN et que les $T_x f$ soient linéaires pour la structure d'espace vectorielle sur $T_x M$ induite par la structure de fibré vectoriel.

Soit M une variété et x un point de M . On note $C_x M$ l'ensemble des courbes lisses passant par x à $t = 0$:

$$C_x M = \{\gamma :]-a, a[\rightarrow M; \gamma(0) = x\}.$$

Toute application lisse f entre deux variété M et N induit, pour chaque x de M , l'application $C_x f$ de $C_x M$ vers $C_{f(x)} N$ qui envoie γ sur $f \circ \gamma$.

On dit que deux éléments γ_0 et γ_1 de $C_x M$ ont même vitesse en 0 s'il existe une carte φ dont le domaine contient x et pour laquelle $(\varphi \circ \gamma_0)'(0) = (\varphi \circ \gamma_1)'(0)$. Le théorème de dérivation des fonctions composées montre que cette propriété est indépendante du choix de la carte φ . Le même théorème montre que cette relation est préservée par $C_x f$ pour toute application f . Détaillons pas exemple ce dernier point. Si γ et γ' sont deux courbes équivalentes dans $C_x M$ alors, par définition, il existe une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\varphi \circ \gamma$ et $\varphi \circ \gamma'$ ont même vitesse à $t = 0$. On considère ensuite une carte $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ dont le domaine contient $f(x)$. On veut montrer que $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma'$ sont équivalentes. On

2. Fibrés

écrit $\psi \circ f \circ \gamma = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$ et $\psi \circ f \circ \gamma' = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma')$. Par définition de la lissité de f , l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est lisse de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Ainsi l'égalité de vitesses supposée entraîne bien celle voulue.

Définition 2.5. L'espace tangent $T_x M$ d'une variété M en un point x est le quotient par la relation d'équivalence « avoir la même vitesse à $t = 0$ » de l'ensemble des courbes lisses passant par x à $t = 0$. Le fibré tangent TM de M est la réunion disjointe des $T_x M$ pour tous les points x de M .

Définition 2.6. L'application tangente à $f: M \rightarrow N$ en un point x est l'application $T_x f$ de $T_x M$ vers $T_{f(x)} N$ induite par $C_x f$. L'application correspondante de TM dans TN est notée Tf , ou parfois Df ou f_* .

L'inusable théorème de dérivation des fonctions composées est alors promu en :

$$T(f \circ g) = Tf \circ Tg.$$

On dit que T est un *foncteur* : il transforme à la fois les objets que sont les variétés et les morphismes que sont les applications lisses entre variétés, d'une façon compatible avec la composition des morphismes.

Exemple 2.7. Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E . L'application de $\mathcal{E} \times E$ dans $C\mathcal{E}$ qui envoie (x, v) sur $t \mapsto x + tv$ induit un isomorphisme de $\mathcal{E} \times E$ sur $T\mathcal{E}$. Cet isomorphisme est fonctoriel : pour toute application différentiable f de \mathcal{E} dans \mathcal{E} , l'isomorphisme identifie $(x, v) \mapsto (f(x), Df(x)v)$ à Tf .

Démonstration. On fixe une base de l'espace vectoriel E . On a ainsi un isomorphisme linéaire Φ de E dans \mathbb{R}^n . En fixant en plus un point O de \mathcal{E} , on obtient une carte globale $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ envoyant A sur $\Phi(A - O)$. Soit A un point de \mathcal{E} et γ une courbe de $C_A \mathcal{E}$. Alors $\varphi \circ \gamma$ a la même vitesse en zéro que $t \mapsto \varphi(A + tu)$ si et seulement si $u = \Phi^{-1}((\varphi \circ \gamma)'(0))$. Ainsi l'application $\Lambda: \mathcal{E} \times E \rightarrow T\mathcal{E}$ décrite dans l'énoncé est bijective. Il reste à vérifier ce que devient Tf . Pour tout (A, u) dans $\mathcal{E} \times E$, $Tf(\Lambda(A, u))$ est la classe d'équivalence de la courbe $\gamma_1: t \mapsto f(A + tu)$. Par ailleurs $\Lambda(f(A), Df_A(u))$ est la classe d'équivalence de $\gamma_2: t \mapsto f(A) + tDf_A(u)$. Les courbes $\varphi \circ \gamma_1$ et $\varphi \circ \gamma_2$ ont bien le même vecteur vitesse en zéro $\Phi(Df_A(u))$. \square

Théorème 2.8. Soit M une variété de dimension n . Il existe une unique structure de variété sur TM pour laquelle la projection évidente $TM \rightarrow M$ est un fibré vectoriel de rang n et pour laquelle tous les $Tf: TM \rightarrow TN$ sont des applications lisses et les $T_x f$ sont linéaires, de rang $\text{rg}_x f$.

On insiste sur le fait que le théorème précédent munit chaque espace tangent $T_x M$ d'une structure d'espace vectoriel de dimension n puisque TM est un fibré vectoriel de rang n . L'exemple 2.7 montre que cette structure est celle attendue dans chaque carte de M .

Démonstration. L'unicité est claire via la remarque 1.6 car $T\text{Id}_M = \text{Id}_{TM}$.

L'existence est basée sur la méthode de recollement de la proposition 2.4. Partant d'un atlas $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n\}$ et de ses changements de cartes $\varphi_{ij} : V_{ij} \rightarrow V_{ji}$, on considère les données de recollement de fibrés $\Psi_{ij} : V_{ij} \times \mathbb{R}^n \rightarrow V_{ji} \times \mathbb{R}^n$ envoyant (b, f) sur $(\varphi_{ij}(b), D\varphi_{ij}(b)(f))$. La relation de cocycle pour les Ψ_{ij} découle immédiatement de celle vérifiée par les φ_{ij} et de la formule de dérivée des fonctions composées. L'exemple 2.7 montre que le fibré vectoriel ainsi obtenu est en bijection avec TM et vérifie les propriétés annoncées. \square

La démonstration précédente a construit la structure de fibré vectorielle sur TM en recollant les fibrés tangents des cartes d'un atlas quelconque de M . On peut donc être tenté de progresser dans l'autre sens et de définir TM à partir d'un atlas comme recollement des fibrés tangents des cartes. Le danger est de se retrouver avec un fibré vectoriel qui ne dépend pas seulement de M mais aussi d'un choix d'atlas (parmi ceux de la classe d'équivalence constituant la structure de variété de M). Il est aisé de montrer que les fibrés obtenus à partir de deux atlas équivalents sont isomorphes. Mais il est beaucoup moins agréable d'avoir une classe d'isomorphisme de fibrés qu'un fibré unique. En particulier la discussion de la functorialité (définition de Tf et propriété $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$) devient cauchemardesque (ou laissée en exercice au lecteur). On peut réparer ces problèmes d'au moins deux manières. D'une part on peut appeler fibré tangent le quotient de la réunion disjointe de tous les fibrés construits (à partir de tous les atlas de la classe d'équivalence) par les isomorphismes construits. On peut aussi utiliser le représentant canonique de la classe d'équivalence d'atlas : l'atlas réunion de tous les atlas de la classe. Mais cet atlas est gigantesque et le fibré tangent ainsi construit n'est pas plus éclairant. Dans les deux cas on a perdu en route la simplicité apparente de l'idée de définir le fibré tangent par recollement des fibrés tangents des cartes.

La construction du fibré tangent permet de définir la notion de champ de vecteurs. Un *champs de vecteurs* sur une variété M est une section de TM . Le théorème de Cauchy-Lipschitz à paramètres, appliqué dans des cartes, montre que, pour tout champ de vecteur X , il existe une fonction $\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et une application Φ_X définie sur $\{(t, x) \in \mathbb{R} \times M; |t| < \varepsilon(x)\}$ et vérifiant

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_X(t, x) = X(\Phi_X(t, x)).$$

On dit que Φ_X est le *flot* de X .

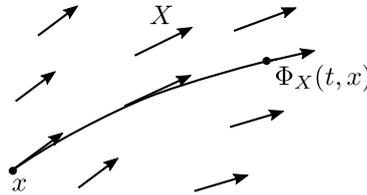


FIG. 2.3. : Flot d'un champ de vecteurs

2.3. Opérations sur les fibrés vectoriels

Un fibré $p: E \rightarrow B$ se tire en arrière par toute application $f: S \rightarrow B$: le *fibré induit* $f^*E \rightarrow S$ est la sous-variété de $S \times E$ définie par $p(e) = f(s)$. On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une sous-variété et que la restriction de la projection $S \times E \rightarrow S$ en fait un fibré de même fibre que E . En particulier, si B' est une sous-variété de B et ι est l'inclusion de B' dans B , ι^*E est appelé *restriction* de E à B' .

À toute opération usuelle sur les espaces vectoriels correspond une opération sur les fibrés vectoriels. Par exemple si E et E' sont deux fibrés vectoriels sur une même base B , la *somme* $E \oplus E'$ de E et E' est la sous-variété de $E \times E'$ définie par $p(e) = p(e')$. On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un fibré vectoriel de fibre $E_b \oplus E'_b$ au-dessus de tout point b . Le *dual* de E est la réunion disjointe des duaux E_b^* . Il existe une unique structure de fibré vectoriel sur cette réunion disjointe telle que l'application d'évaluation $E \oplus E^* \rightarrow \mathbb{R}$ soit lisse et que toute application de E dans \mathbb{R} qui est linéaire en restriction à chaque fibre définisse une section lisse de E^* . L'exemple le plus important de cette construction est le *fibré cotangent*, le dual du fibré tangent. Il est noté T^*M plutôt que $(TM)^*$ pour plus de concision. Pour toute fonction $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, la composée de $Tf: TM \rightarrow T\mathbb{R}$, de l'isomorphisme $T\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de l'exemple 2.7, et de la projection sur le second facteur fournit une section de T^*M notée df et appelée *différentielle* de f .

Le *fibré des applications linéaires* de E vers E' est la réunion disjointe des $L(E_b, E'_b)$ munie de l'unique structure de fibré vectoriel au-dessus de B telle que, pour tout morphisme de fibrés vectoriels $f: E \rightarrow E'$, la collection des $f_b = f|_{E_b}$ forme une section lisse de $L(E, E')$ et les applications naturelles $E \oplus L(E, E') \rightarrow E'$ et $L(E, E') \oplus (E')^* \rightarrow E^*$ soient lisses. L'existence et l'unicité des structures de fibré vectoriel sur E^* et $L(E, E')$ sont des exercices de manipulation de la remarque 1.6 pour l'unicité et de la méthode de recollement de la proposition 2.4 pour l'existence.

Un *sous-fibré* d'un fibré vectoriel $E \rightarrow B$ est une sous-variété $F \subset E$ telle que, pour tout b dans B , F_b soit un sous-espace vectoriel de E_b . On peut vérifier que la restriction à F de la projection $E \rightarrow B$ est alors elle-même un fibré vectoriel. En pratique on peut considérer que cette dernière propriété fait partie de la définition.

À tout sous-fibré F de E est associé le *fibré quotient* $E/F \rightarrow B$ défini ponctuellement par $(E/F)_b = E_b/F_b$ et muni de l'unique structure de fibré vectoriel telle que, pour tout morphisme de fibrés $\varphi: E \rightarrow G$ vérifiant $\ker \varphi_b \subset F_b$ pour tout b , l'application induite de E/F dans G soit lisse. L'unicité est claire car l'identité de E/F est induite par la projection de E sur E/F . L'existence se démontre par la méthode du recollement.

Soit N une sous-variété d'une variété M . En tout point x de N , l'inclusion de $C_x N$ dans $C_x M$ induit une inclusion de fibrés vectoriels $TN \subset TM$. Plus précisément, $TN \subset \iota^*TM$ où $\iota: N \hookrightarrow M$ est l'inclusion de N , mais cet abus de notation est sans grand danger. Le fibré quotient $\nu N = TM/TN$ est appelé *fibré normal* de N dans M . Ce fibré est isomorphe à tout fibré supplémentaire de TN dans ι^*TM .

2.4. Orientations

On rappelle qu'une orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie strictement positive est une classe d'équivalence de bases pour la relation qui lie deux bases si le déterminant de l'une dans l'autre est positif. Par convention, une orientation de l'espace vectoriel de dimension zéro est un signe $+$ ou $-$. Chaque espace vectoriel de dimension finie possède exactement deux orientations. Par définition, un endomorphisme préserve l'orientation s'il envoie une base sur une base équivalente. Cette notion est indépendante du choix d'une orientation. Par définition, un difféomorphisme entre ouverts connexes d'un espace affine préserve l'orientation si sa différentielle (en un point quelconque) préserve l'orientation.

Définition 2.9. *Un atlas orienté d'une variété M est un atlas dont tous les changements de cartes préservent l'orientation. Une variété est orientable si elle admet un atlas orienté. Une variété orientée est une variété munie d'une classe d'équivalence d'atlas orientés. La relation d'équivalence est définie comme dans le chapitre 1 en remplaçant le mot « atlas » par « atlas orienté ».*

Toute variété orientable correspond à exactement deux variétés orientées.

En chaque point x d'une variété orientée M , l'espace tangent $T_x M$ est orienté. En effet, la construction de la structure différentiable du fibré tangent montre que chaque carte dont le domaine contient x fournit une identification entre $T_x M$ et \mathbb{R}^n . Ce dernier possède une orientation canonique et la définition d'atlas orienté montre que l'orientation qu'elle induit sur $T_x M$ ne dépend pas du choix de carte. On dit qu'une orientation de M induit une orientation du fibré tangent TM . Il ne faut pas confondre cette notion d'orientation d'un fibré vectoriel, sous-entendu fibre à fibre, avec celle de l'espace total du fibré. En fait on montre facilement que l'espace total d'un fibré tangent est toujours orientable (les changements de cartes de la démonstration du théorème 2.8 préservent l'orientation).

En tout point n d'une sous-variété N de M , on peut considérer les trois espaces vectoriels $T_n N$, $T_n M$ et le quotient $\nu_n N$. Tout choix d'orientation de deux d'entre eux fixe une unique orientation du troisième en imposant qu'un relevé d'une base directe de $\nu_n N$ suivi d'une base directe de $T_n N$ fournisse une base directe de $T_n M$. On en déduit par exemple qu'une sous-variété d'une variété orientable est orientable si et seulement si son fibré normal est orientable (fibre à fibre). Lorsqu'on fixe une orientation de M et de N , on munit toujours νN de l'orientation correspondante.

2.5. Exercices

Exercice 2.1. *On note $\mathbb{C}P^1$ l'espace des droites de \mathbb{C}^2 muni de la topologie quotient vu comme $(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$. On note U_i la projection de l'ouvert $\{z_i \neq 0\}$.*

1. *Montrer que les U_i sont ouverts et que l'application $(z_1, z_2) \mapsto z_2/z_1$ (resp. $(z_1, z_2) \mapsto z_1/z_2$) induit un homéomorphisme φ_1 (resp. φ_2) de U_1 (resp. U_2) sur \mathbb{C}^* .*

2. Fibrés

2. Montrer que l'atlas constitué de φ_1 et φ_2 est lisse. Dans la suite on munira toujours $\mathbb{C}P^1$ de la structure de variété correspondante.
3. On note p la restriction de la projection $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ à la sphère unité \mathbb{S}^3 . Montrer qu'il existe des sections de p au-dessus des U_i (ie. de applications $s_i : U_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$ telles que $p \circ s_i = \text{Id}$).
4. En utilisant que $U(1)$, le groupe des nombres complexes de module 1, agit transitivement sur les fibres de p , en déduire que p est un $U(1)$ -fibré de fibre \mathbb{S}^1 .
5. Ce fibré semble-t-il trivial ?

Exercice 2.2. Montrer qu'un fibré vectoriel de rang un est trivial si et seulement si il admet une section qui ne s'annule nulle part.

Montrer que le ruban de Möbius n'est pas un fibré trivial.

Exercice 2.3. Soit $f: M \rightarrow N$ une submersion d'une variété dans une autre. Soit n_0 un point de l'image de f et A son image réciproque. Montrer que A est une sous-variété et décrire son fibré tangent en terme de Tf .

Exercice 2.4. Un groupe de Lie est une variété G munie d'une structure de groupe telle que la multiplication est lisse de $G \times G$ dans G et l'inversion est un difféomorphisme de G . On note e l'élément neutre de G .

1. Montrer que les « translations à gauche » $L_g: h \mapsto gh$ sont des difféomorphismes.
2. Montrer que l'application de $G \times T_e G$ dans TG qui envoie (g, v) sur $T_e L_g(v)$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de G (en particulier TG est trivial).
3. Vérifier que $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$ est un groupe.
4. Montrer que l'application de \mathbb{S}^3 dans $M_2(\mathbb{C})$ défini par

$$(a, b, c, d) \mapsto \begin{pmatrix} a + ib & -c + id \\ c + id & a - ib \end{pmatrix}$$

est un homéomorphisme de \mathbb{S}^3 sur $SU(2)$. En déduire que TS^3 est trivial.

Exercice 2.5. Montrer que le ruban de Möbius n'est pas orientable (en tant que variété de dimension 2, pas en tant que fibré vectoriel). En déduire que la bouteille de Klein et le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ ne sont pas orientables. Construire une variété de dimension 3 contenant une bouteille de Klein plongée avec un fibré normal trivial.

Exercice 2.6. Soit E et E' deux fibrés vectoriels au-dessus d'une même base B . En fonction de trivialisations locales de E et E' , décrire des trivialisations locales de $L(E, E')$.

Exercice 2.7. Soit E un fibré vectoriel au-dessus d'une base B et F un sous-fibré vectoriel de E . Montrer que tout point x de B est contenu dans un ouvert U au-dessus duquel on a une trivialisation locale $E|_U \simeq U \times \mathbb{R}^n$ qui identifie $F|_U$ à $U \times (\mathbb{R}^k \times \{0\})$.

3. Sous-variétés et plongements

Dans ce chapitre, on introduit des outils permettant l'étude des sous-variétés et des plongements entre variétés. L'outil fondamental est l'existence de partitions de l'unité qui permet de passer de constructions locales à des constructions globales. En particulier, il est facile de plonger localement une variété dans un \mathbb{R}^N : les cartes d'un atlas font l'affaire. Les partitions de l'unité permettent un plongement global, comme on l'expliquera dans le cas des variétés compactes.

On étudie ensuite à quoi ressemble globalement un voisinage d'une sous-variété, c'est la notion de voisinage tubulaire. Ici le théorème de plongement évoqué ci-dessus fournit un outil d'étude théorique des variétés en ramenant l'existence des voisinages tubulaires au cas des sous-variétés de \mathbb{R}^N . La première conséquence importante de l'existence des voisinages tubulaires est un théorème d'approximation des applications continues entre variétés par des applications lisses. Dans les chapitres suivants, ce résultat permettra de démontrer des théorèmes de topologie pure (portant sur des applications supposées seulement continues) par des méthodes reposant sur le calcul différentiel.

Enfin la dernière section étend le champ d'investigation du cours aux variétés à bord, des espaces localement modélés sur \mathbb{R}^n ou sur un demi-espace fermé de \mathbb{R}^n et dans lesquels on peut toujours faire du calcul différentiel. Par exemple une boule fermée d'un espace vectoriel est une variété à bord. Les points de la boule ouverte ont des voisinages modélés sur \mathbb{R}^n mais les points de la sphère ont des voisinages modélés sur des demi-espaces fermés. Le bord d'une variété à bord est une variété (sans bord). En plus de former une extension naturelle de la classe des variétés, les variétés à bord apparaissent spontanément quand on déforme les applications lisses entre variétés. Ainsi, étant données deux variétés (sans bord) M et N , une famille d'applications $f_t : M \rightarrow N$, $t \in [0, 1]$ est naturellement une application de $M \times [0, 1] \rightarrow N$. Mais $M \times [0, 1]$ présente visiblement un bord constitué de $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$.

3.1. Partitions de l'unité et plongements

Le théorème suivant est la clef permettant des constructions globales à partir de constructions locales.

Théorème 3.1. *Pour tout recouvrement d'une variété M par des ouverts U_i , il existe une famille de fonctions lisses $\rho_i : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :*

- *le support de chaque ρ_i est contenu dans U_i*
- *chaque point de M possède un voisinage n'intersectant qu'un nombre fini de supports des ρ_i*

3. Sous-variétés et plongements

- $\sum \rho_i \equiv 1$.

Démonstration. Le fait fondamental est l'existence d'une fonction cloche lisse.

Lemme 3.2. *Il existe une fonction $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui est C^∞ , strictement positive en l'origine et à support compact.*

Démonstration. En dimension un, on peut choisir la fonction χ_1 qui, sur $] -1, 1[$ envoie x sur $\exp(-1/(1-x^2))$ et s'annule ailleurs. Une récurrence facile montre que cette fonction est lisse partout. En dimension n on peut utiliser $x \mapsto \prod \chi_1(x_i)$. \square

En composant à droite par une homothétie, on peut imposer au support d'une cloche d'être contenu dans une boule de rayon arbitrairement petit. En utilisant un atlas, on obtient donc que, pour tout point x d'une variété et tout ouvert U contenant x , il existe une fonction positive qui est strictement positive en x et dont le support est contenu dans U . Une telle fonction sera appelée cloche en x à support dans U .

Supposons que M n'est pas compacte (le cas plus facile où M est compacte est laissé en exercice). Par hypothèse de σ -compacité dans la définition des variétés, il existe des compacts C_n dont la réunion recouvre M . On pose $K_n = \bigcup_{k \leq n} C_k$. Chaque K_n est compact, $\bigcup K_n = M$ et, quitte à extraire une sous-suite, K_n est dans l'intérieur de K_{n+1} . Pour tout x dans l'adhérence L_n de $K_{n+1} \setminus K_n$, on choisit un ouvert B_x suffisamment petit pour être inclus dans l'un des U_i et dans $K_{n+2} \setminus K_{n-1}$. Soit χ_x une cloche en x à support dans B_x . On pose $V_x = \chi_x^{-1}(]0, \infty[)$. Les ouverts V_x recouvrent le compact L_n donc on peut en extraire une famille finie. L'union sur n de ces ouverts fournit un recouvrement dénombrable localement fini de M par des V_j où chaque V_j est inclus dans un $U_{i(j)}$ et de la forme $\chi_j^{-1}(]0, \infty[)$ pour une fonction χ_j lisse, positive et à support dans $U_{i(j)}$. La condition de finitude montre que la série $\sum \chi_j$ converge (c'est une somme finie en restriction à n'importe quel compact). La condition de recouvrement montre que la somme est partout strictement positive. On pose

$$\rho_i = \frac{\sum_{j; i(j)=i} \chi_j}{\sum \chi_j}$$

qui a bien les propriétés annoncées. \square

Voici un premier corollaire important de l'existence de partitions de l'unité.

Théorème 3.3. *Toute variété compacte se plonge dans un espace affine \mathbb{R}^N .*

Démonstration. Soit $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ un atlas d'une variété compacte M . Par compacité, on peut supposer que cet atlas est fini : $i \leq p$. Le théorème 3.1 fournit une partition de l'unité (ρ_i) subordonnée au recouvrement par les U_i . On va tronquer les ρ_i pour les rendre constantes sur des ouverts recouvrant M . Comme $\sum \rho_i \equiv 1$, pour tout x de M , il existe $i(x)$ tel quel $\rho_{i(x)}(x) \geq 1/(2p)$. On fixe une fonction lisse $\chi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ qui s'annule pour $t \leq 1/(8p)$ et vaut un pour $t \geq 1/(4p)$. On peut par exemple construire une telle fonction en composant à gauche et à droite par des applications affines une primitive

de la fonction du lemme 3.2 s'annulant au voisinage de $-\infty$ (pour $n = 1$). On pose $\lambda_i = \chi \circ \rho_i$. Par construction, les $V_i = \rho_i^{-1}([1/(3p), 1])$ sont des ouverts inclus dans les U_i qui recouvrent M , chaque λ_i est à support compact et vaut un sur V_i . En passant des ρ_i aux λ_i , on perd le contrôle de la somme mais on gagne des ouverts sur lesquels les λ_i sont constantes.

On considère sur M les applications

$$f_i : x \mapsto \begin{cases} \lambda_i(x)\varphi_i(x) & \text{si } x \text{ est dans } U_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui sont lisses de M dans \mathbb{R}^n et des difféomorphismes locaux sur les V_i correspondants. Puis on considère $g_i : x \mapsto (f_i(x), \lambda_i(x))$ à valeur dans \mathbb{R}^{n+1} . Enfin on considère $g = (g_1, \dots, g_p)$ de M dans $\mathbb{R}^{p(n+1)}$. Il s'agit d'une immersion car tout point x de M est dans un V_i et $T_x g_i$ est injective donc a fortiori $T_x g$ aussi. Elle est injective car, si $g(x) = g(y)$ alors $\lambda_i(x) = \lambda_i(y)$ pour tout i donc en particulier pour $i(x)$. Ainsi y est aussi dans $V_{i(x)}$ et l'égalité $f_{i(x)}(x) = f_{i(x)}(y)$ entraîne alors $\varphi_{i(x)}(x) = \varphi_{i(x)}(y)$ puis $x = y$ par injectivité des cartes φ_i .

Ainsi g est une immersion injective. Comme M est compacte, g est un plongement. En effet, l'image réciproque d'un fermé F de M par g^{-1} est égale à son image directe par g . Or F est compact comme fermé d'un compact donc $g(F)$ est compact donc fermé. \square

En fait l'hypothèse de compacité n'est pas nécessaire (mais la retirer nécessite de la technologie qui ne sera introduite que dans le chapitre suivant). On verra dès la section suivante que ce théorème de plongement est utile pour démontrer des résultats généraux. Mais il n'aide pas vraiment à comprendre les variétés qui, comme les espaces projectifs ou la bouteille de Klein, ne se présentent pas naturellement comme sous-variétés de \mathbb{R}^N .

3.2. Voisinages tubulaires

Soit N une sous-variété d'une variété M . On rappelle que le fibré normal à N dans M est le quotient TM/TN (ou, plus précisément, le quotient de la restriction de TM à N par TN). Le théorème suivant montre que ce fibré vectoriel contrôle la façon dont N est plongée dans M .

Théorème 3.4. *Soit N une sous-variété compacte d'une variété M . Il existe un voisinage U de la section nulle dans le fibré normal νN dont l'intersection avec chaque fibre est convexe et un plongement $e : U \rightarrow M$ qui est l'identité sur N vu comme section nulle de νN . En particulier la projection $\pi : \nu N \rightarrow N$ induit une fibration localement triviale d'un voisinage $e(U)$ de N vers N dont les fibres sont difféomorphes à des boules.*

Le voisinage $e(U)$ du théorème précédent équipé de sa projection sur N est appelé *voisinage tubulaire* de N dans M . La définition des sous-variétés assure évidemment l'existence de voisinages tubulaires locaux provenant des cartes de redressement de N . La difficulté de recoller ces voisinages locaux est contournée par la démonstration ci-dessous via le théorème de plongement de la section précédente.

3. Sous-variétés et plongements

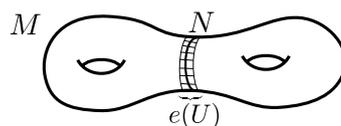


FIG. 3.1. : Voisinage tubulaire et ses fibres.

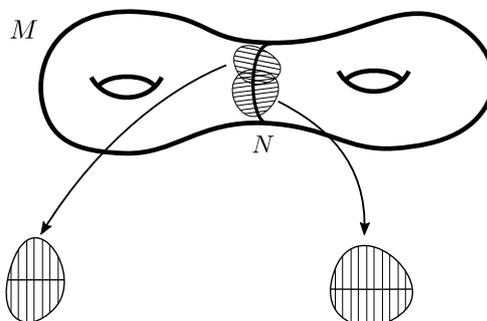


FIG. 3.2. : Voisines tubulaires locaux provenant des redressements locaux.

Démonstration. On commence par le cas où M est un espace affine \mathbb{R}^p . On utilise le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^p , vu comme champ de produits scalaires sur $T\mathbb{R}^p$. Dans ce cas νN est isomorphe au sous-fibré $TN^\perp = \{(x, v); x \in N, v \perp T_x N\}$ de $\iota^*T\mathbb{R}$ car $T_x\mathbb{R}^p = T_x N \oplus (T_x N)^\perp$ pour tout x dans N . De plus on a une application $e : TN^\perp \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $e(x, v) = x + v$. Pour tout x dans N , la différentielle de e en $(x, 0)$ vaut l'identité. Elle reste donc inversible au voisinage de la section nulle. Le théorème d'inversion locale garantit que e est localement injective au voisinage de la section nulle. Il reste à montrer qu'elle l'est globalement (toujours au voisinage de la section nulle). Supposons par l'absurde qu'il existe deux suite (x_k, v_k) et (y_k, w_k) avec $v_k \rightarrow 0$ et $w_k \rightarrow 0$ telles que $x_k + v_k = y_k + w_k$ pour tout k mais $(x_k, v_k) \neq (y_k, w_k)$. Par compacité de N , on peut supposer que x_k converge vers un certain n . Comme v_k et w_k tendent vers zéro, y_k tend aussi vers n . Cela contredit l'injectivité de e au voisinage de $(n, 0)$.

On démontre maintenant le cas général. Le théorème 3.3 fournit¹ un plongement de M dans \mathbb{R}^p . On peut alors munir chaque $T_x M$, vu comme sous-espace vectoriel de $T_x\mathbb{R}^p$, de la restriction du produit scalaire canonique de \mathbb{R}^p . On alors un isomorphisme entre νN et $E = \{(x, v), x \in N, v \in T_x M; v \perp T_x N\}$. Soit $\pi : V \rightarrow M$ la projection d'un voisinage tubulaire de M fournit par la première partie de la démonstration. On définit $e : E \rightarrow N$ par $e(x, v) = \pi(x + v)$, qui est bien défini si v est assez petit pour que $x + v$ soit dans V . Le reste de la démonstration est complètement analogue au cas $M = \mathbb{R}^p$. \square

Le théorème de plongement, l'existence de voisinages tubulaires et l'existence de partitions de l'unité permettent de déformer toute application continue entre variétés compactes en une application lisse. Pour donner un énoncé précis, on rappelle qu'une *ho-*

1. Si M n'est pas compacte, il faut adapter un peu l'énoncé et la démonstration, le point crucial étant que, par compacité de N , cette dernière est recouverte par un nombre fini de cartes de M .

motopie entre deux applications continues f_0 et f_1 d'un espace topologique X dans un autre Y est une application continue F de $X \times [0, 1]$ dans Y vérifiant $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$. On dit alors que f_0 et f_1 sont homotopes.

Théorème 3.5. *Toute application continue entre variétés compactes est homotope à une application lisse, par une homotopie arbitrairement C^0 -proche d'être constante. Si cette application continue est lisse au voisinage d'un compact alors on peut imposer à l'homotopie d'être constante sur un voisinage (plus petit) de ce compact.*

Démonstration. Soit f une application continue entre deux variétés P et Q . Le théorème 3.3 permet de supposer que Q est une sous-variété de \mathbb{R}^N . Soit $\pi : V \rightarrow Q$ la projection d'un voisinage tubulaire de Q fournit par le théorème 3.4.

Soit $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ un atlas fini de P et ρ_i une partition de l'unité subordonnée à cet atlas. Chaque application $f_i := f \circ \varphi_i^{-1}$ est une application continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^N et $K_i := \varphi_i(\text{supp } \rho_i)$ est compact. Soit $(f_i^k)_k$ une suite de fonctions lisses sur \mathbb{R}^n convergant uniformément vers f_i sur K_i . On pose $f^k = \sum_i \rho_i(x) f_i^k(\varphi_i(x))$. Cette application est bien définie car $\rho_i(x)$ s'annule là où $\varphi_i(x)$ n'est pas défini. On convient alors que le produit des deux est nul. Ainsi f^k est une application lisse définie sur tout P . Puisque les ρ_i sont à valeur dans $[0, 1]$ et de somme 1, on a l'estimée :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f^k(x)\| &= \left\| f(x) - \sum_i \rho_i(x) f_i^k(\varphi_i(x)) \right\| \\ &= \left\| \sum_i \rho_i(x) [f(x) - f_i^k(\varphi_i(x))] \right\| \\ &\leq \sum_i \sup_{x \in \text{supp } \rho_i} \|f(x) - f_i^k(\varphi_i(x))\| \end{aligned}$$

La somme sur i ne comportant qu'un nombre fini de termes, on a bien la convergence uniforme de f^k vers f . De même l'homotopie $f_t^k = (1-t)f + tf^k$ converge vers f uniformément en $t \in [0, 1]$. En particulier les f_t^k sont à valeur dans le voisinage tubulaire V de Q pour k assez grand et l'homotopie $\pi \circ f_t^k$ est à valeur dans Q . Comme f était déjà à valeurs dans Q , $\pi \circ f = f$ et l'uniforme continuité de π sur un voisinage compact de Q montre que tous les $\pi \circ f_t^k$ convergent vers f quand k tend vers l'infini, uniformément en t .

Le cas où f était déjà lisse au voisinage d'un compact est laissé en exercice. \square

3.3. Variétés à bord

Il est naturel d'étendre un peu la classe des variétés en autorisant la présence d'un bord. Ainsi on veut pouvoir considérer la boule unité fermée de \mathbb{R}^n comme une variété à bord, de bord la sphère unité.

Pour cela on ajoute comme modèle les ouverts de $\mathbb{R}_-^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 \leq 0\}$. On rappelle que, par définition de la topologie induite sur une partie, les ouverts de \mathbb{R}_-^n sont les intersections d'ouverts de \mathbb{R}^n avec \mathbb{R}_-^n . On définit le bord $\partial\mathbb{R}_-^n$ de \mathbb{R}_-^n comme $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et le bord d'un ouvert U de \mathbb{R}_-^n comme $\partial U := U \cap \partial\mathbb{R}_-^n$.

3. Sous-variétés et plongements

Une application lisse φ entre ouverts U et V de \mathbb{R}^n est, par définition, la restriction à U d'une application $\hat{\varphi} : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ entre des voisinages ouverts dans \mathbb{R}^n de U et V respectivement. Un difféomorphisme entre ouverts U et V de \mathbb{R}^n est une bijection qui est la restriction à U d'un difféomorphisme entre des voisinages ouverts de U et V dans \mathbb{R}^n .

Lemme 3.6. *Tout difféomorphisme entre deux ouverts U et V de \mathbb{R}^n envoie le bord de U sur le bord de V .*

Démonstration. Les points de $U \setminus \partial U$ sont caractérisés par l'existence, pour tout vecteur v de \mathbb{R}^n d'une courbe $\gamma : [-1, 1] \rightarrow U$ vérifiant $\dot{\gamma}(0) = v$. Cette caractérisation est bien invariante par difféomorphisme. \square

Le lemme précédent reste vrai pour les homéomorphismes mais sa démonstration est plus difficile.

Un atlas de variété à bord sur un espace topologique M est une famille $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}$ où les U_i forment un recouvrement ouvert de M , les V_i sont des ouverts de \mathbb{R}^n , les φ_i sont des homéomorphismes et les changements de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont des difféomorphismes. Deux tels atlas sont équivalents si leur réunion est encore un atlas de variété à bord.

Définition 3.7. *Une variété à bord est un espace topologique M muni d'une classe d'équivalence d'atlas de variété à bord. Le bord de M est l'ensemble des points envoyés dans $\partial\mathbb{R}^n$ par une carte.*

Le lemme précédent montre que le bord d'une variété à bord est bien défini.

On définit les *applications lisses* et *difféomorphismes* entre variétés à bord de la même façon que dans le cas sans bord. Il faut simplement prendre garde au fait que la définition d'application lisse entre ouverts de \mathbb{R}^n suppose l'existence d'une extension lisse à un ouvert de \mathbb{R}^n . De même le *fibré tangent* a une définition analogue à celui des variétés sans bord mais $C_x M$ contient en plus les courbes $\gamma : [-1, 0] \rightarrow M$ vérifiant $\gamma(0) = x$. Ainsi l'espace tangent à M en un point de son bord est bien un espace vectoriel et pas une moitié d'espace vectoriel.

Le bord ∂M d'une variété à bord M est une sous-variété (sans bord), pour une extension évidente de la définition de sous-variété. Si M est orientable alors son bord l'est aussi. En effet le fibré normal $\nu\partial M$ est toujours trivial car on peut distinguer le côté rentrant dans M du côté sortant. Par convention, si M est orientée, on oriente ∂M de sorte qu'un vecteur sortant suivi d'une base directe de $T\partial M$ fournisse une base directe de TM . Bien sûr le bord de M ne saurait avoir de voisinage tubulaire, on peut espérer au mieux un « demi-voisinage tubulaire ». Plus précisément un *voisinage collier* de ∂M est un plongement h de $] -1, 0] \times \partial M$ dans M tel que $h(0, m) = m$ pour tout m . L'exercice 3.3 démontre l'existence de ces voisinages.

Une modification facile du cas sans bord permet de définir les sous-variétés à bord d'une variété à bord. On dit qu'une sous-variété N est proprement plongée dans M si l'inclusion de N dans M est propre au sens topologique (l'image réciproque de tout compact est compact), si $\partial N = N \cap \partial M$ et $T_x N + T_x \partial M = T_x M$ en tout x de ∂N . Cette dernière condition reviendra dans le chapitre suivant.

3.4. Exercices

Exercice 3.1. Une métrique riemannienne sur une variété M est un champ de produits scalaires g sur le fibré tangent. Plus précisément, g est une section (lisse) du fibré $L(TM \times TM, \mathbb{R})$ telle que chaque g_x est un produit scalaire sur $T_x M$. À l'aide de partitions de l'unité, montrer que toute variété admet une métrique riemannienne. À l'aide du théorème de plongement, donner une autre démonstration de ce résultat dans le cas des variétés compactes.

Exercice 3.2. Soit B la boule unité de \mathbb{R}^n et f une fonction continue de B dans B . On suppose que f est l'identité en restriction à S^{n-1} . Montrer que f est homotope à une application lisse ayant la même propriété.

Exercice 3.3. Montrer que le fibré normal du bord d'une variété à bord est toujours trivial. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, en déduire l'existence de voisinages collier du bord lorsque ce dernier est compact.

Exercice 3.4. Soit M la suspension du difféomorphisme de \mathbb{T}^2 induit par $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Soit Σ la surface image de $S^1 \times \{0\} \times \mathbb{R}$ dans M . Montrer que le fibré normal de Σ dans M n'est pas (isomorphe à) un fibré trivial. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ qui est une submersion au voisinage de Σ et vérifie $f^{-1}(0) = \Sigma$.

4. Transversalité

Dans ce chapitre, qui est le sommet de la première partie du cours, on part de deux situations assez intuitives et, en apparence, éloignées.

Tout d'abord on a vu dans le chapitre 1 que l'image inverse X d'un point p par une application lisse f est une sous-variété (peut-être vide) lorsque $T_x f$ est surjective en tout x de X . Le premier résultat majeur de chapitre, le théorème de Sard, affirme que cette hypothèse est vérifiée pour presque tout point p à l'arrivée. On dit alors que p est une valeur régulière de f . On peut penser à l'exemple de $(x, y) \mapsto xy$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} pour lequel l'image inverse est une hyperbole lisse sauf dans le cas $p = 0$.

La deuxième situation concerne une paire de sous-variétés A et B d'une même variété M . L'intuition est que, sauf malchance, ces sous-variétés soit s'évitent entièrement si $\dim(A) + \dim(B) < \dim(M)$ soit se coupent franchement le long d'une sous-variété C de dimension $\dim(M) - \dim(A) - \dim(B)$. Cette intuition est fondée sur le cas des sous-espaces affines d'un espace affine. Par exemple une droite et un plan dans \mathbb{R}^3 se coupent en un point, sauf accident, tandis que deux droites s'évitent entièrement et que deux plans se coupent le long d'une droite. Dans ces situations « hors accident », on dit que A et B sont transversales.

Les deux contextes peuvent être réunis dans la questions suivante : étant donné une application lisse $f: M \rightarrow N$ et une sous-variété A de N , on cherche à savoir si $f^{-1}(A)$ est une sous-variété, sauf accident. La première situation est clairement de ce type. La deuxième situation correspond au cas où f est l'inclusion de la sous-variété B . Le deuxième grand théorème de ce chapitre, qui découle du premier, est le théorème de transversalité de Thom. Il entraîne en particulier que f peut être perturbée pour garantir que $f^{-1}(A)$ est une sous-variété.

La fin du chapitre tire partie de ce théorème pour mettre sur pied la théorie de l'intersection qui permet de compter avec des signes le nombre d'intersections de deux sous-variétés de façon invariante par déformation. Des cas particuliers de cette théorie permettent de définir le degré d'une application entre variétés compactes orientées de même dimension et la caractéristique d'Euler. Le degré est un compte avec signes du nombre de préimages d'un point tandis que la caractéristique d'Euler compte les zéros d'un champ de vecteurs. Là encore on obtient des nombres invariants par déformation. Les exercices en présentent des applications concrètes, en particulier les théorèmes de Brouwer annoncés dans l'introduction.

4.1. Transversalité et images réciproques

La condition de transversalité est une condition infinitésimale (c'est-à-dire portant sur des dérivées) qui assure que la préimage d'une sous-variété par une application est une

4. Transversalité

sous-variété, ce qui est une conclusion locale.

Définition 4.1. Soit $f: M \rightarrow N$ une application entre variétés et A une sous-variété de N . On dit que f est transversale sur A si, en tout x de $f^{-1}(A)$, $T_x f(T_x M) + T_{f(x)} A = T_{f(x)} N$. Autrement dit, f est transversale sur A si, en tout x de $f^{-1}(A)$, la composée de $T_x f$ et de la projection $T_{f(x)} N \rightarrow \nu_{f(x)} A$ est surjective.

On dit que deux sous-variétés A et B de M sont transversales si $T_x A + T_x B = T_x M$ en tout point x de $A \cap B$. Cela équivaut à dire que l'inclusion de A dans M est transversale sur B . La proposition suivante, qui est le passage promis de l'infinitésimal au local, garantit en particulier que l'intersection $A \cap B$ est alors une sous-variété de M , de codimension égale à la somme des codimensions de A et B .

Proposition 4.2. Soit M et N des variétés (sans bord) et $A \subset N$ une sous-variété (sans bord). Si f est transversale sur A alors $f^{-1}(A)$ est une sous-variété de M de même codimension que A dans N . Son espace tangent en un point x est le noyau de $p \circ T_x f$ où p projette $T_{f(x)} N$ sur son quotient $\nu_{f(x)} A$. Dit autrement, la différentielle Tf induit un isomorphisme de $\nu f^{-1}(A)$ sur νA .

Si M et N sont des variétés à bord mais A reste sans bord et est inclus dans l'intérieur de N alors la même conclusion est vraie si f et sa restriction $f|_{\partial M}$ sont toutes deux transversales sur A . De plus $f^{-1}(A)$ a pour bord $f^{-1}(A) \cap \partial M$ et est transversale au bord de M .

Démonstration. On traite d'abord le cas sans bord. Soit x_0 un point de $f^{-1}(A)$ et $y \in A$ son image par f . D'après la proposition 1.7, il existe un ouvert V contenant y_0 et une submersion $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ tels que $A \cap V = g^{-1}(0)$. Soit U l'ouvert $f^{-1}(V)$. Comme $f^{-1}(A) \cap U = (g \circ f)^{-1}(0)$, l'autre implication de la proposition 1.7 assure qu'il suffit de vérifier que $g \circ f$ est une submersion en tout point de $f^{-1}(A) \cap U$. C'est une simple affaire d'algèbre linéaire.

Lemme 4.3. Soit E, F et G des espaces vectoriels, $\varphi: E \rightarrow F$ et $\pi: F \rightarrow G$ des applications linéaires. Si π est surjective et $\text{im } \varphi + \ker \pi = F$ alors $\pi \circ \varphi$ est surjective et φ induit un isomorphisme $E / \ker(\pi \circ \varphi) \simeq F / \ker \pi$.

Démonstration. On note p la projection de F sur $F / \ker \pi$ et $\bar{\pi}$ l'application induite par π de $F / \ker \pi$ sur G .

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{\varphi} & F & \xrightarrow{\pi} & G \\
 \downarrow & & \searrow p & \nearrow \bar{\pi} & \\
 E / \ker(\pi \circ \varphi) & \dashrightarrow & F / \ker \pi & &
 \end{array}$$

L'hypothèse de surjectivité assure que $\bar{\pi}$ est un isomorphisme. En particulier $\ker(\pi \circ \varphi) = \ker(p \circ \varphi)$ donc $p \circ \varphi$ induit une application injective de $E / \ker(\pi \circ \varphi)$ sur $F / \ker \pi$. Comme $\text{im } \varphi + \ker \pi = F$, $F / \ker \pi = \text{im } \varphi / \ker \pi$ et cette application est aussi surjective. \square

Dans la situation de la proposition, pour tout y dans $A \cap V$, $T_y g$ est surjective et $\ker T_y g = T_y A$ tandis que $T_x f(T_x M) + T_y A = T_y N$. Cela permet bien d'appliquer le lemme avec $E = T_x M$, $\varphi = T_x f$, $F = T_y N$, $G = \mathbb{R}^k$ et $\pi = T_y g$.

Supposons maintenant que M est une variété à bord (mais pas A). Soit x un point de $f^{-1}(A)$. Si x est dans l'intérieur de M , il n'y a aucune différence avec la situation considérée ci-dessus. Supposons donc que x est au bord de M . Par définition des applications lisses en provenance d'une variété à bord, il existe une carte $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et un ouvert V de \mathbb{R}^n contenant $\varphi(U)$ de sorte que $f \circ \varphi^{-1}$ s'étende en application lisse de V vers N . Localement on est donc ramené à la situation d'une sous-variété M' dans l'intérieur de M avec l'hypothèse que $f|_{M'}$ est transversale sur A (donc a fortiori f est transversale sur A). La discussion précédente montre que $f^{-1}(A)$ est une sous-variété de M et il s'agit de montrer qu'elle est transversale à M' . Là encore c'est une affaire d'algèbre linéaire.

Lemme 4.4. *Soit E et F des espaces vectoriels, E' un sous-espace de E et u une application linéaire de E dans F . Si la restriction de u à E' est surjective alors $\ker u + E' = E$.*

Démonstration. Soit e dans E . Par hypothèse de surjectivité, il existe e' dans E' tel que $u(e') = u(e)$. On peut donc écrire $e = (e - e') + e'$ avec $e - e' \in \ker u$ et $e' \in E'$. \square

On applique ce lemme à la composée de $T_x f$ et de la projection sur $\nu_{f(x)} A$ et à sa restriction à $T_x M'$ pour conclure la démonstration. \square

4.2. Théorème de Sard

On rappelle qu'une partie A de \mathbb{R}^n est dite négligeable si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir A par une collection dénombrable de cubes dont la somme des volumes est inférieure à ε . En particulier un sous-espace vectoriel de codimension non-nulle est négligeable et le complémentaire d'un ensemble négligeable est dense. Le théorème des accroissements finis montre que l'image d'une partie négligeable par un C^1 -difféomorphisme est négligeable. En particulier on obtient une notion d'ensemble négligeable dans une variété et, vu l'exemple des sous-espaces vectoriels, il est plausible que l'image d'une application lisse entre une variété de dimension m et une variété de dimension $n > m$ soit négligeable. Cela contraste avec l'existence des courbes de Peano, des fonctions continues surjectives de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$. En fait on va montrer un résultat bien plus fort qui sera la clef de voûte de la suite du chapitre : le *théorème de Sard*. Son énoncé nécessite la notion de *valeur régulière*. Un point n d'une variété N est valeur régulière de $f: M \rightarrow N$ si $T_x f$ est surjective pour tout x dans $f^{-1}(n)$. Autrement dit f est transversale sur $\{n\}$. On prendra garde à la bizarrerie linguistique suivante : si n n'est pas dans l'image de f alors il est automatiquement valeur régulière de f . L'expérience montre que cette définition de valeur régulière, avec sa bizarrerie, est la bonne façon d'avoir des énoncés sans cas particuliers artificiels.

Théorème 4.5. *Soit $f: M \rightarrow N$ une application entre variétés. Presque tout point de N est valeur régulière de f .*

4. Transversalité

Intuitivement, en un point $f(x)$, l'image de f se propage dans les directions de $\text{im } T_x f$. Si ces directions n'atteignent pas tout $T_{f(x)}N$ alors la propagation est négligeable.

Remarque : comme partout dans ce cours, l'application f est implicitement supposée de classe C^∞ . On verra que la démonstration consomme effectivement de nombreuses dérivées de f lorsque la dimension de la source augmente par rapport à celle du but. Une lecture attentive montre que C^r avec $r \geq \max(m - n + 1, 1)$ suffit. Ce n'est pas un accident, il existe des exemples de fonctions C^1 de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} dont les valeurs critiques recouvrent un intervalle ouvert, ce qui montre que l'explication intuitive ci-dessus n'est pas suffisante.

Démonstration. On note C l'ensemble $\{x \in M; \text{rg}_x f < \dim N\}$ des points critiques de f . Le théorème affirme que $f(C)$ est négligeable. Comme M et N sont réunions dénombrables d'ouverts de cartes et qu'une réunion dénombrable de négligeables est négligeable, on peut supposer que $M = \mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$. On va montrer le résultat par récurrence sur m . L'initialisation $m = 0$ étant évidente, on suppose $m \geq 1$ et le résultat démontré jusqu'à la dimension $m - 1$.

L'ensemble C contient bien sûr $C_1 := \{x; T_x f = 0\}$. Plus généralement, pour tout $k \geq 1$, on considère l'ensemble $C_k \subset C$ des points où toutes les dérivées partielles de f d'ordre inférieur à k sont nulles. Par définition, $C_k \subset C_{k-1} \subset \dots \subset C_1 \subset C$ donc il suffit de montrer que, pour k assez grand, $C \setminus C_1$, C_k et tous les $C_j \setminus C_{j+1}$ sont négligeables. Ces trois types d'ensembles demandent des arguments séparés.

Cas de C_k

Soit I un cube fermé de côté 1. Comme \mathbb{R}^m est réunion dénombrable de tels cubes, il suffit de montrer que $f(I \cap C_k)$ est négligeable. En un point x de $I \cap C_k$, la formule de Taylor donne $\|f(x+h) - f(x)\| \leq c\|h\|^{k+1}$, pour une constante c uniforme dans I . Soit l un entier positif, qui tendra vers l'infini. On subdivise I en l^m cubes de côté $1/l$. Si I_1 est un de ces cubes qui contient un point x de C_k alors tout autre point de I_1 s'écrit $x+h$ avec $\|h\| \leq \sqrt{m}/l$ par Pythagore. L'estimée de Taylor montre donc que $f(I_1)$ est contenu dans une boule de rayon $c(\sqrt{m}/l)^{k+1}$ donc dans un cube de côté $2c(\sqrt{m}/l)^{k+1} =: a/l^{k+1}$ où a ne dépend ni de x ni de l . Ainsi on peut recouvrir $f(I \cap C_k)$ par au plus l^m cubes de côté inférieur à a/l^{k+1} . Chacun de ces cubes est de volume au plus $a^n/l^{n(k+1)}$ donc la somme de leurs volumes vaut au plus $a^n/l^{n(k+1)-m}$. Cette somme tend vers zéro quand l tend vers l'infini si k est suffisamment grand¹.

Cas de $C_j \setminus C_{j+1}$

En tout point x de $C_j \setminus C_{j+1}$, il existe une composante de f , disons f_1 , et une dérivée partielle d'ordre $j+1$ de f_1 non-nulle, disons $\partial^{j+1} f_1 / \partial x_1 \partial x_j$ pour un multi-indice J de longueur j . Soit U un voisinage de x dans lequel cette dérivée partielle reste non nulle. On note H le lieu des zéros de $\varphi := \partial^j f_1 / \partial x_j$ dans U . Il s'agit d'une hypersurface puisque $\partial \varphi / \partial x_1$ est non-nul. Cette hypersurface contient en particulier $C_j \cap U$. De plus tous les points de $C_j \cap U$ sont critiques pour $f|_H$ car la dérivée de f en ces points est nulle. Donc $f(C_j \cap U)$ est contenu dans l'ensemble des valeurs critiques de $f|_H$ qui est

1. Plus exactement il suffit d'avoir $n(k+1) > m$. Cependant cette inégalité ne se propage pas dans la récurrence lors de l'examen du cas $C \setminus C_1$, au contraire de l'inégalité $k \geq \max(m - n + 1, 1)$ qui est la bonne hypothèse.

4.3. Théorème de transversalité de Thom

négligeable par hypothèse de récurrence. Comme $C_j \setminus C_{j+1}$ est recouvert par une famille dénombrable de tels ouverts U , ce cas est traité.

Cas de $C \setminus C_1$

C'est le cas le plus délicat car ces points sont les plus proches d'être réguliers. Il n'apparaît que lorsque le but est de dimension $n \geq 2$. Soit x un point de $C \setminus C_1$. Puisque $T_x f$ n'est pas nul, son image contient une droite Δ . Soit π une projection linéaire de \mathbb{R}^n sur Δ . Par construction, $\pi \circ f$ est une submersion en x , donc sur un voisinage U de x . Pour tout t dans Δ , la fibre U_t de $\pi \circ f$ au-dessus de t est une hypersurface (peut-être vide) envoyée par f dans l'hyperplan $H_t := \pi^{-1}(t)$. On note f_t l'application de U_t dans H_t ainsi obtenue. Par hypothèse de récurrence, l'ensemble des valeurs critiques de f_t est négligeable dans H_t . Or l'ensemble C^t des points critiques de f_t est exactement $(C \setminus C_1) \cap U_t$ car la direction manquante dans U_t est envoyée surjectivement sur la direction manquante dans H_t . Ainsi $f(C \setminus C_1) \cap H_t$ est négligeable dans H_t pour tout t et le théorème de Fubini (ou une vérification directe) permet de conclure. \square

4.3. Théorème de transversalité de Thom

Le premier résultat crucial de cette section est un résultat de transversalité en famille : si une famille d'applications est transversale sur une sous-variété alors presque tous les membres de cette famille le sont. Cette observation pénétrante est due à René Thom. Elle a définitivement dégagé le rôle fondamental du théorème de Sard.

Proposition 4.6. *Soit M et N et P des variétés et A une sous-variété de N . Si une application $F: M \times P \rightarrow N$ est transversale sur A alors, pour presque tout p dans P , $F_p := F(\cdot, p)$ est transversale sur A .*

Dans l'énoncé ci-dessus, P joue le rôle d'espace des paramètres et F est vu comme la famille des F_p .

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème de Sard et d'une observation d'algèbre linéaire triviale :

Lemme 4.7. *Soit E , F et G trois espaces vectoriels et $\pi: E \rightarrow F$ et $\pi': E \rightarrow G$ deux applications linéaires. Si π et π' sont surjectives alors $\pi|_{\ker \pi'}$ est surjective si et seulement si $\pi'|_{\ker \pi}$ l'est.*

Démonstration. Vu la symétrie de la situation, il suffit de montrer une implication. Supposons que $\pi|_{\ker \pi'}$ est surjective. Soit g un élément de G . Par surjectivité de π' , il existe e_0 vérifiant $\pi'(e_0) = g$. Comme $\pi|_{\ker \pi'}$ est surjective, il existe $e_1 \in \ker \pi'$ tel que $\pi(e_1) = \pi(e_0)$. L'élément $e := e_0 - e_1$ est dans $\ker \pi$ et vérifie $\pi'(e) = g$. \square

4. Transversalité

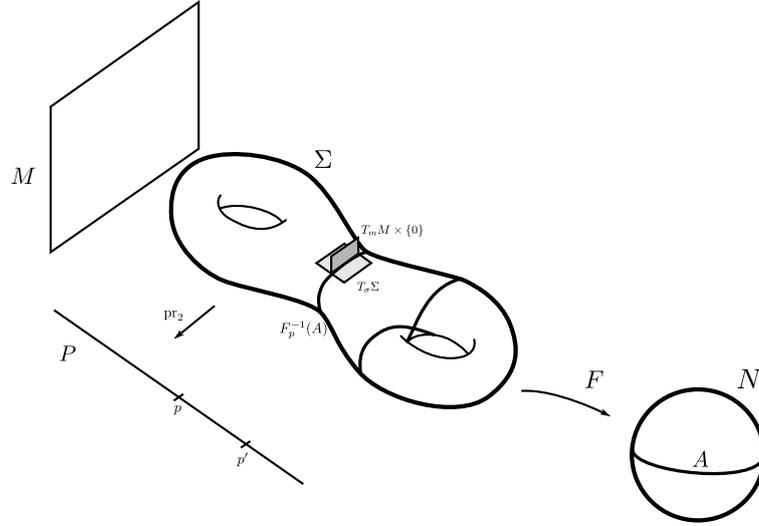


FIG. 4.1.: Transversalité en famille. La préimage de A par F est la surface Σ , sa préimage par F_p est l'intersection avec le plan vertical $M \times \{p\}$. Le théorème de Sard appliqué à la restriction à Σ de $\text{pr}_2 : M \times P \rightarrow P$ assure que cette intersection est lisse pour presque tout p : le point p' de la figure est une exception.

Le diagramme suivant montre les principaux protagonistes introduits ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \ker \pi' = T_m M \times \{0_p\} & & & & \\
 & & \downarrow & \searrow^{T_m F_p} & & & \\
 \ker \pi = T_\sigma \Sigma & \hookrightarrow & T_m M \times T_p P & \xrightarrow{T_\sigma F} & T_{F(\sigma)} N & \xrightarrow{\rho} & \nu_{F(\sigma)} A \\
 & & \downarrow \pi' & \searrow^{\pi} & & & \\
 & & T_p P & & & &
 \end{array}$$

Soit ρ la projection de $\iota^* TN$ sur νA . Par hypothèse de transversalité, $\Sigma = F^{-1}(A)$ est une sous-variété de $M \times P$ et, pour tout σ dans Σ , $\pi := \rho \circ T_\sigma F : T_\sigma \Sigma \rightarrow \nu_{F(\sigma)} A$ est surjective. On note $\text{pr}_2 : M \times P \rightarrow P$ la projection sur le deuxième facteur de $M \times P$. D'après le théorème de Sard, presque tout p dans P est valeur régulière de $\text{pr}_2|_\Sigma$. Pour un tel p et pour tout $\sigma = (m, p)$ dans $\text{pr}_2^{-1}(p)$, la différentielle $\pi' = T_\sigma \text{pr}_2$ restreinte à $T_\sigma \Sigma$ est surjective. Or $T_\sigma \Sigma = \ker \pi$ donc le lemme d'algèbre linéaire montre que $\pi|_{\ker \pi'}$ est aussi surjective. Puisque $\ker \pi' = T_\sigma(M \times \{p\})$, on a $\pi|_{\ker \pi'} = \rho \circ T_\sigma F|_{T_\sigma(M \times \{p\})} = \rho \circ T_m F_p$ et F_p est transversale sur A . \square

Puisqu'une partie de mesure pleine est dense, la proposition précédente montre que, pour approcher une application $f : M \rightarrow N$ par une application transversale sur une sous-variété A , il suffit de l'inclure dans une famille transversale sur A . L'observation

4.3. Théorème de transversalité de Thom

suivante est qu'il est fructueux d'être plus ambitieux et de chercher à inclure f dans une famille qui submerge N : si $F: M \times P \rightarrow N$ est une submersion alors F est transversale sur toute sous-variété $A \subset N$. En particulier le lemme suivant permet d'établir la densité des applications transversales. Il affirme qu'il existe une famille de difféomorphismes de N de dimension finie qui secoue N partout dans toutes les directions.

Lemme 4.8. *Pour toute variété compacte N , il existe un entier k et une application $\Phi: N \times \mathbb{R}^k \rightarrow N$ telle que $\Phi(\cdot, 0) = \text{Id}_N$, chaque $\Phi(\cdot, s)$ est un difféomorphisme de N et, pour tout n dans N , $\Phi(n, \cdot)$ est une submersion.*

L'énoncé ci-dessus devient évident si on remplace N par \mathbb{R}^p . Dans ce cas, il suffit de choisir $k = p$ et de poser $\Phi(n, v) = n + v$. La démonstration du lemme consistera à utiliser cette idée dans les cartes d'un atlas fini. La modification cruciale sera de passer d'une translation $n \mapsto n + v$, qui ne s'étend pas hors de la carte, à un difféomorphisme à support compact. Pour cela il suffit de voir la translation comme l'aboutissement du mouvement $n \mapsto n + tv$, $t \in [0, 1]$, et de freiner le mouvement en s'approchant du bord de la carte. Avant de voir les détails de ce lemme, on en déduit immédiatement une version du *théorème de transversalité de Thom* :

Théorème 4.9. *Soit $f: M \rightarrow N$ une application entre variétés et A une sous-variété de N . On suppose que N est compacte. Il existe une famille lisse de difféomorphismes φ_t de N , $t \in [0, 1]$ qui sont tous arbitrairement proches de l'identité (en norme C^r pour tout r) tels que $\varphi_0 = \text{Id}$ et $\varphi_1 \circ f$ est transversale sur A .*

Si f est déjà transversale sur A en tout point d'un compact $K \subset M$, alors il existe une homotopie lisse f_t , $t \in [0, 1]$, telle que $f_0 = f$, tous les f_t sont arbitrairement proches de f (en norme C^r pour tout r) et coïncident avec f au voisinage de K et f_1 est transversale sur A .

Dans le théorème, la famille φ est lisse au sens où $(t, n) \mapsto \varphi_t(n)$ est lisse et de même pour l'homotopie de la deuxième partie. Une telle famille de difféomorphismes est appelée *isotopie* de N .

Démonstration. Soit Φ l'application fournie par le lemme 4.8. On note $\Phi_s = \Phi(\cdot, s)$. L'application de $M \times \mathbb{R}^k$ dans N définie par $(m, s) \mapsto \Phi(f(m), s)$ est une submersion puisque, en tout (m, s) , sa différentielle restreinte à $\{0\} \times T\mathbb{R}^k$ est déjà surjective. Ainsi cette application est transversale sur A et la proposition 4.6 assure que, pour presque tout s , $\Phi_s \circ f$ est transversale sur A . On pose alors $\varphi_t = \Phi_{ts}$ pour un s petit.

Si f est transversale sur A en tout point de K , elle l'est encore sur un voisinage U de K car la condition de transversalité est ouverte. Soit $\rho: M \rightarrow [0, 1]$ une fonction plateau à support dans U qui vaut un sur un voisinage de K . On considère

$$F: (m, s) \mapsto \Phi(f(m), (1 - \rho(m))s)$$

de $M \times \mathbb{R}^k$ dans N . Elle est transversale sur A en tout point de $F^{-1}(A) \cap (U \times \{0\})$ car $T_{(m,0)}F|_{T_m M \times \{0\}} = T_m f$ et f est transversale sur A dans U . Quitte à rétrécir U , on peut le supposer d'adhérence compacte. On obtient ainsi la transversalité dans $F^{-1}(A) \cap (U \times$

4. Transversalité

$B(0, \varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$. Si m n'est pas dans U alors $T_{(m,s)}F|_{\{0\} \times \mathbb{R}^k} = T_s\Phi(f(m), \cdot)$ est surjective donc F est a fortiori transversale sur A . Ainsi la proposition 4.6 appliquée à $F|_{M \times B(0,\varepsilon)}$ permet de trouver $s \in B(0, \varepsilon)$ arbitrairement proche de l'origine tel que F_s est transversale sur A . On pose $f_t = F(\cdot, ts)$. \square

Démonstration du lemme 4.8. Comme annoncé, l'idée consiste à empiler des translations dans toutes les directions dans des cartes de N , mais en freinant chaque mouvement de translation pour éviter qu'il ne tente de sortir de sa carte. Soit $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d\}$ un atlas fini de N . Comme dans la démonstration du théorème 3.3, on utilise une partition de l'unité pour obtenir des ouverts V_i inclus dans l'intérieur des U_i qui recouvrent encore N et des fonctions $\lambda_i : U_i \rightarrow [0, 1]$ à support compact qui valent un sur V_i . Sur chaque $\varphi_i(U_i)$ et pour chaque vecteur v dans \mathbb{R}^d on considère le champ de vecteur tronqué $\lambda_i(\varphi_i^{-1}(x))v$. Il est à support compact, coïncide avec v sur $\varphi_i(V_i)$ et s'annule partout si v est nul. On note ψ_v son flot au temps 1. On remarque que, pour tout x dans V , la dérivée de $\psi_v(x)$ par rapport à v en $v = 0$ est l'identité puisque, pour v assez petit, $\psi_v(x) = x + v$. Par ailleurs ψ_v est à support dans $\varphi_i(U_i)$. On peut donc poser

$$\Phi^i \left(\begin{array}{l} N \times \mathbb{R}^d \rightarrow N \\ (n, u_i) \mapsto \varphi_i^{-1} \circ \psi_{u_i} \circ \varphi_i(x) \end{array} \right)$$

puis $\Phi(n, (u_1, \dots, u_m)) = \Phi_{u_m}^m \circ \dots \circ \Phi_{u_1}^1(n)$ où m est le nombre de cartes. Chaque Φ_u est un difféomorphisme comme composée de difféomorphismes et $\Phi_0 = \text{Id}_N$. De plus chaque $\Phi(n, \cdot)$ est une submersion en l'origine car il existe i tel que V_i contienne n et la dérivée partielle de Φ en $(n, 0)$ par rapport à u_i est surjective (c'est la différentielle de φ_i^{-1} en $\varphi_i(n)$).

L'ensemble G des (n, u) tels que $\Phi(n, \cdot)$ soit une submersion en (n, u) est un ouvert de $N \times (\mathbb{R}^d)^m$. Donc, pour chaque n , il existe un ouvert O_n de N et un rayon $\varepsilon_n > 0$ tel que $O_n \times B(0, \varepsilon_n)$ soit inclus dans G . Par compacité de N , on peut recouvrir N par un nombre fini de O_{n_j} et $N \times B(0, \varepsilon)$ est dans G pour tout $\varepsilon \leq \min(\varepsilon_{n_j})$. Comme $B(0, \varepsilon)$ est difféomorphe à \mathbb{R}^k , le lemme est démontré. \square

Dans la première partie du théorème précédent, l'application f est perturbée en application transversale sur A en la modifiant parmi une famille très spécifique d'applications de M dans N : celles qui sont de la forme $\varphi \circ f$ pour φ un difféomorphisme de N . On dit qu'il s'agit d'un théorème de *transversalité sous contrainte*, par opposition au résultat plus faible affirmant qu'on peut perturber f parmi toutes les applications de M dans N . Dans le chapitre suivant, la densité des fonctions de Morse (théorème 5.7) sera un autre exemple de transversalité sous contrainte. La méthode suivie plus haut suggère la définition suivante, due à François Laudenbach² : on dit qu'une partie $\mathcal{F} \subset C^\infty(M, N)$ est *universellement transversale* si, pour tout élément f de \mathcal{F} , il existe une famille $F : M \times P \rightarrow N$ d'éléments de \mathcal{F} contenant f et submergeant N . Dans cette situation, pour toute sous-variété $A \subset N$, l'ensemble des applications transversales sur A est dense dans \mathcal{F} .

2. X63, Professeur à l'École polytechnique de 1992 à 2000

4.4. Théorie de l'intersection

Soit X une variété orientée et N une sous-variété orientée compacte sans bord de X . Soit M une variété orientée compacte sans bord et $f: M \rightarrow X$. On suppose que $\dim M + \dim N = \dim X$ et que f est transversale sur N . En particulier $f^{-1}(N)$ est un sous-ensemble fini de M . Pour chaque x dans cet ensemble, on a un isomorphisme $p_{f(x)} \circ T_x f: T_x M \rightarrow \nu_{f(x)} N$ où p est la projection de la restriction de TX à N sur νN . Comme X et N sont orientées, l'espace vectoriel $\nu_{f(x)} N$ est orienté. On pose $\#_x(f, N) = \pm 1$ selon que $p_{f(x)} \circ T_x f$ préserve ou renverse l'orientation. Encore plus concrètement, $\#_x(f, N) = 1$ si l'image par $T_x f$ d'une base directe de $T_x M$ suivie d'une base directe de $T_{f(x)} N$ donne une base directe de $T_{f(x)} X$ et -1 sinon. Le nombre d'intersection global de f sur N est la somme de ces contributions locales :

$$\#(f, N) = \sum_{x \in f^{-1}(N)} \#_x(f, N).$$

On note immédiatement que $\#(f, N)$ change de signe si on change l'orientation d'un nombre impair de variétés parmi M , N et X .

Théorème 4.10. *Le nombre d'intersection est invariant par homotopie : si f et g sont deux applications de M dans X transversales sur N et homotopes alors $\#(f, N) = \#(g, N)$.*

En particulier, on peut définir $\#(f, N)$ pour une application non transversale sur N , comme $\#(g, N)$ pour n'importe quel g homotope à f et transversale sur N fournie par le théorème 4.9.

Le point crucial est que le nombre d'intersection est nul pour toute application qui s'étend à une variété compacte dont le bord est M :

Lemme 4.11. *Soit Y une variété compacte à bord et $f: Y \rightarrow X$. On suppose que $\dim \partial Y + \dim N = \dim X$ et que f et $f|_{\partial Y}$ sont toutes deux transversales sur N . Alors $\#(f|_{\partial Y}, N) = 0$.*

Démonstration. Les hypothèses de transversalité et de compacité assurent que $A = f^{-1}(N)$ est une sous-variété compacte de Y qui est transversale au bord de Y et dont le bord est exactement $A \cap \partial Y$. De plus les hypothèses de dimension assurent que A est de dimension 1. Ainsi A est constitué d'un nombre fini de cercles dans l'intérieur de Y et d'un nombre fini d'arcs reliant deux par deux les points de $f|_{\partial Y}^{-1}(N)$. De plus chaque arc est orienté et sort de Y à une extrémité tandis qu'il rentre à l'autre. Ceci entraîne que les deux extrémités contribuent à $\#(f|_{\partial Y}, N)$ avec des signes opposés. \square

Démonstration du théorème 4.10. L'hypothèse d'homotopie signifie qu'il existe une application continue $F: Y = M \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $F|_{M \times \{0\}} = f$ et $F|_{M \times \{1\}} = g$. Le théorème 3.5 permet de supposer que F est lisse (sans changer f et g). Le théorème de transversalité de Thom permet de supposer que F est transversale sur N , toujours sans changer f et g , ce qui assure $F|_{\partial Y}$ est elle aussi transversale sur N . Le lemme montre alors que $\#(F|_{\partial Y}, N) = 0$. Or l'orientation induite par $M \times [0, 1]$ sur

4. Transversalité

M est l'orientation de départ sur $M \times \{1\}$ et l'orientation opposée sur $M \times \{0\}$. Ainsi $\#(F|_{\partial Y}, N) = \#(g, N) - \#(f, N)$ et le théorème est démontré. \square

Définition 4.12. *Dans le cas particulier où f est l'inclusion d'une sous-variété orientée $M \subset X$, on note $\#(f, N) =: \#(M, N)$ et on l'appelle nombre d'intersection entre M et N .*

Si M et N sont transversales alors la valeur absolue de $\#(M, N)$ est majorée par le nombre de points de $M \cap N$ mais, au contraire de ce dernier, $\#(M, N)$ est invariant par isotopie de M ou N .

On rappelle que, dans la démonstration du théorème 2.8, à partir d'un atlas pour M ayant des changements de cartes φ_{ij} , on a construit un atlas pour TM ayant pour changements de cartes les $(x, v) \mapsto (\varphi_{ij}(x), D\varphi_{ij}(x)(v))$ allant de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans lui-même. La différentielle d'un tel changement de carte est triangulaire supérieure avec deux blocs $D\varphi_{ij}(x)$ sur la diagonale donc elle préserve l'orientation. Or $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est muni d'une orientation canonique, celle pour laquelle la concaténation de deux fois la même base donne une base directe. Ainsi on récupère une orientation canonique sur l'espace total TM .

Définition 4.13. *La caractéristique d'Euler d'une variété orientable compacte sans bord est le nombre d'intersection $\#(M, M)$ où M est vue comme la section nulle de TM .*

Dans la définition ci-dessus, TM est muni de son orientation canonique. Le choix d'une orientation sur M n'importe pas car elle intervient deux fois dans la définition.

Définition 4.14. *Soit M et N deux variétés connexes, compactes, sans bord et de même dimension. Le degré d'une application continue $f: M \rightarrow N$ est le nombre d'intersection $\#(f, \{n\})$ où n est un point quelconque de N .*

Ainsi, pour toute valeur régulière n de f , le degré de f est le nombre de préimages de n comptées positivement (resp. négativement) là où f préserve (resp. renverse) l'orientation. Cependant il n'est pas complètement clair que ce nombre soit indépendant du choix de n .

Lemme 4.15. *Dans la définition 4.14, le nombre obtenu est indépendant du choix de n dans N .*

Démonstration. Soit n et n' deux points de N . Le théorème de transversalité permet de perturber f pour la rendre transversale sur n et n' .

Le point clef est alors qu'il existe une homotopie h_t de difféomorphismes de N entre l'identité et un difféomorphisme envoyant n sur n' . En effet, si on fixe n , l'ensemble des n' pour lesquels l'affirmation est vraie est ouvert et fermé (il suffit de démontrer l'affirmation lorsque N est un cube dans \mathbb{R}^p) et N est supposée connexe. Par continuité de h_t par rapport à t , tous les h_t , et en particulier h_1 , préservent l'orientation.

Le théorème 4.10 d'invariance par homotopie donne $\#(f, n') = \#(h_1 \circ f, n')$. Mais ce dernier n'est autre que $\#(f, n)$. En effet, $h_1 \circ f(m) = n' \Leftrightarrow f(m) = n$ et, pour un tel m , $T_m(h_1 \circ f) = T_n h_1 \circ T_m f$ préserve l'orientation si et seulement si $T_m f$ le fait. \square

L'invariance des nombres d'intersection par homotopie entraîne immédiatement l'invariance du degré par homotopie.

4.5. Exercices

Exercice 4.1. On dit que $f: K \rightarrow M$ et $g: L \rightarrow M$ sont transversales si, pour tout k et l tel que $f(k) = g(l) = m$, on a $T_m M = \text{im } T_k f + \text{im } T_l g$. Montrer que, dans ce cas, le produit fibré $K \times_M L := \{(k, l); f(k) = g(l)\}$ est une sous-variété de $K \times L$. On pourra commencer par montrer que $\Gamma_f \times \Gamma_g$ (où Γ_f et Γ_g sont les graphes de f et g) est transversale à $\{(k, m, l, m), k \in K, l \in L, m \in M\}$.

Exercice 4.2. Soit M une variété compacte à bord. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de rétraction de M sur ∂M , c'est à dire pas d'application continue de M dans ∂M qui soit l'identité sur ∂M .

1. En utilisant un voisinage collier du bord, montrer que l'existence d'une rétraction continue impliquerait l'existence d'une rétraction lisse.
2. On suppose l'existence d'une rétraction lisse r . Montrer que la préimage d'une valeur régulière de r est une sous-variété de dimension un proprement plongée dans M et dont le bord est connexe non vide.
3. Conclure.
4. En déduire le théorème de point fixe de Brouwer : toute application continue de la boule B^n dans elle-même admet au moins un point fixe.

Exercice 4.3. Soit M et N deux sous-variétés compactes orientées dans une variété X orientée. Montrer que $\#(M, N) = \pm \#(N, M)$ et expliciter le signe.

Exercice 4.4. On note $P_{\pm} = (0, \dots, 0, \pm 1)$ les deux pôles de la sphère S^n . Soit $\varphi_{\pm}: S^n \setminus \{P_{\pm}\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ les projections stéréographiques associées. On rappelle que le changement de carte associé envoie x sur $x/\|x\|^2$.

1. Montrer que le champ de vecteurs radial dans \mathbb{R}^n poussé par φ_+ s'étend (de façon unique) en champ de vecteurs lisse sur S^n .
2. Calculer la caractéristique d'Euler de la sphère S^n .
3. En déduire le théorème de la boule chevelue de Brouwer : les sphères S^{2n} de dimension paire n'admettent pas de champ de vecteurs continus ne s'annulant pas.

Exercice 4.5. Soit $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application polynomiale de degré n (au sens de l'algèbre). On identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 puis au complémentaire d'un point de S^2 par projection stéréographique.

1. Montrer que P s'étend continuellement en application de S^2 dans S^2 .

4. Transversalité

2. En utilisant l'invariance du degré par déformation, montrer que P est de degré n (au sens de la topologie différentielle).
3. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss : P est surjectif (en particulier P admet au moins une racine).

Exercice 4.6. Soit X un champ de vecteurs sur la boule B^n . On suppose que X ne s'annule pas sur la sphère $S^{n-1} = \partial B^n$ et note $\deg(X)$ le degré de $X/\|X\| : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.

1. Montrer que $\deg(X)$ est invariant par homotopie de X (parmi les champs de vecteurs ne s'annulant pas sur S^{n-1}).
2. Montrer que si X n'est nulle part tangent à S^{n-1} alors son degré vaut 1.
3. Montrer que si X ne s'annule pas dans B^n alors son degré est nul.
4. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss et le théorème de point fixe de Brouwer (en toute dimension).

Exercice 4.7. Soit M une variété de dimension n non-orientable plongée dans \mathbb{R}^{n+1} .

1. Montrer qu'il existe une application $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ transversale sur M et dont l'image intersecte M en exactement un point.
2. Montrer que γ s'étend en application lisse $u : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ transversale sur M .
3. Montrer que M ne saurait être compacte.

Exercice 4.8. Soit $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$ des applications continues entre variétés compactes orientées sans bord. Montrer que $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$. En déduire qu'un homéomorphisme est de degré ± 1 .

5. Théorie de Morse

Ce chapitre présente une application des outils mis en place dans les quatre chapitres précédents. Il ne sera pas utilisé dans la suite du cours. L'objectif est d'étudier la topologie d'une variété M compacte sans bord à partir d'une fonction f de M dans \mathbb{R} . On commence par montrer que, pour un ouvert dense de fonctions, la différentielle df est transversale sur la section nulle de T^*M . En particulier elle ne s'annule qu'en un nombre fini de points, appelés points critiques de f . À chacun de ces points on peut associer un entier appelé son indice et qui compte le nombre de directions indépendantes dans lesquelles la valeur de f descend. On explique alors comment calculer la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ à partir des indices des points critiques de f . Tout cela découle facilement de la technologie de transversalité du chapitre précédent et d'un résultat de forme normale connu sous le nom de lemme de Morse.

L'étape suivante pour obtenir des informations plus fines consiste à introduire la notion de pseudo-gradient de f . Un pseudo-gradient de f est un champ de vecteurs dont le flot fait croître f hors des points critiques (la définition vraiment utilisée est bien sûr plus précise). La dynamique de ces flots est très simple grâce au contrôle exercé par f . On peut la simplifier encore plus à l'aide des techniques de transversalité puis s'appuyer sur cette dynamique pour simplifier f . Après avoir discuté ces simplifications en toute dimension, on expliquera comment en déduire un théorème de structure pour les variétés de dimension 3 : toute variété de dimension 3 compacte sans bord se décompose en deux variétés recollées le long de leur bord commun et qui chacune se rétracte sur un graphe.

5.1. Hessienne

La théorie de Morse fait jouer un rôle essentiel à la hessienne d'une fonction en un point critique. Avant de discuter cette notion sur une variété, rappelons la situation classique pour une fonction f d'un espace affine réel \mathcal{E} dans \mathbb{R} . On note E l'espace vectoriel dirigeant \mathcal{E} . La dérivée première Df est une application de \mathcal{E} dans $L(E, \mathbb{R})$. La dérivée seconde $D(Df)$ est donc une application de \mathcal{E} dans $L(E, L(E, \mathbb{R}))$. Ce dernier espace est canoniquement isomorphe à $B(E)$, l'espace des formes bilinéaires sur E . La hessienne de f est la dérivée seconde vue à travers cet isomorphisme : $\text{Hess } f(x)(v, w) = D(Df)(x)(v)(w)$. Le théorème de symétrie de Schwarz assure que cette forme bilinéaire est symétrique.

Dans la discussion précédente, il est important que l'espace d'arrivée de Df soit indépendant du point. Elle ne se généralise donc pas immédiatement au cas des variétés car les espaces tangents dépendent du point. On va voir que ce problème disparaît aux points critiques.

5. Théorie de Morse

On commence par une discussion générale. Soit $p : E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. On note $Z_E = \{0_x ; x \in M\}$ la section nulle de E , c'est à dire l'ensemble des 0 des espaces vectoriels E_x pour x parcourant M . Il s'agit d'une sous-variété de E naturellement diffeomorphe à M via $x \mapsto 0_x$. Chaque fibre E_x de E est à la fois une sous-variété de E et un espace vectoriel. La discussion du fibré tangent à un espace affine ou vectoriel (exemple 2.7) donne un isomorphisme naturel $T_v E_x \simeq E_x$ pour tout x dans M et v dans E_x . Les fibres de E sont transversales à la section nulle et les identifications discutées ci-dessus fournissent, pour tout point x de M , une décomposition en somme directe canonique $T_{0_x} E \simeq T_x M \oplus E_x$.

Soit M une variété et T^*M son fibré cotangent, le fibré vectoriel dual de TM , de fibre $L(T_x M, \mathbb{R})$ en tout x . Comme expliqué dans la section 2.3, toute fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fournit une section df de T^*M , qui envoie x sur la composée de $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}$ et de l'isomorphisme $T_{f(x)} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ de l'exemple 2.7. Pour tout point x et tout vecteur v de $T_x M$, $df_x(v)$ est la dérivée de f dans la direction de v .

Puisque \mathbb{R} est de dimension une, les points critiques de f sont les points x tels que $df_x = 0$, c'est à dire les points envoyés par df dans la section nulle de T^*M . Pour un tel x on peut composer $T_x df : T_x M \rightarrow T_{0_x} T^*M \simeq T_x M \oplus T_x^*M$ avec la projection sur le facteur T_x^*M pour obtenir une application linéaire de $T_x M$ dans T_x^*M . La forme bilinéaire correspondante sur $T_x M \times T_x M$ (qui envoie (v, w) sur $T_x df(v)(w)$) est appelée *Hessienne* de f en x et notée $\text{Hess}_x f$. Il est important de remarquer que, contrairement à Tdf , cette forme bilinéaire n'est définie qu'aux points critiques de f .

Lemme 5.1. *La hessienne d'une fonction sur une variété en un point critique est une forme bilinéaire symétrique. Vue dans une carte, cette hessienne correspond à la hessienne classique d'une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Toute carte identifie un ouvert de la variété à un ouvert d'un espace affine \mathcal{E} et l'exemple 2.7 montre que $T\mathcal{E}$ s'identifie à $\mathcal{E} \times E$ et $T\mathbb{R}$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de sorte que Tf devient $(x, v) \mapsto (f(x), Df(x)(v))$. Ainsi df devient l'application de \mathcal{E} dans $\mathcal{E} \times E^*$ qui envoie x sur $(x, Df(x))$. En itérant le processus on identifie Tdf à l'application de $\mathcal{E} \times E$ dans $(\mathcal{E} \times E^*) \times (E \times E^*)$ qui envoie (x, v) sur $(x, Df(x), v, D(Df)(x)(v))$. En un point critique x , $Df(x) = 0$ et la hessienne de f est identifiée à la forme bilinéaire sur E qui envoie (v, w) sur $D(Df)(x)(v)(w)$. On retrouve la hessienne du calcul différentiel sur un espace affine. En particulier le théorème de symétrie de Schwarz assure que cette forme bilinéaire est symétrique. \square

Remarque 5.2. *Cette démonstration via les cartes pourrait laisser l'impression trompeuse qu'on peut définir la hessienne d'une fonction sur une variété même en dehors des points critiques. En effet, la discussion en carte ci-dessus ne semble pas nécessiter l'hypothèse $Df(x) = 0$. Le point subtil est qu'on est parti du fait que la hessienne est bien définie aux points critiques et on l'a étudiée dans une carte. Si on part de la hessienne dans les cartes pour remonter à la variété il faut s'assurer que cette notion est indépendante du choix de carte, ce qui n'est pas le cas aux points où df est non nul.*

L'indice d'un point critique est l'indice de la hessienne de la fonction en ce point, c'est

à dire le maximum des dimensions des sous-espaces sur lesquels la hessienne est définie négative.

5.2. Fonctions de Morse

Définition 5.3. Une fonction $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ est de Morse si sa différentielle df est transversale sur la section nulle de T^*M .

Le lien entre la définition ci-dessus et la hessienne introduite dans la section précédente est fourni par la notion de forme bilinéaire non dégénérée. On pourra se rapporter à l'annexe B.2 si des rappels d'algèbre semblent nécessaires.

La deuxième partie de la proposition suivante est le célèbre *lemme de Morse*.

Proposition 5.4. Une fonction $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ est de Morse si et seulement si sa hessienne est non dégénérée en tout point critique. Dans ce cas, pour tout point critique p_0 de f , il existe une carte $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ envoyant p_0 sur 0 et telle que

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p_0) - x_1^2 - \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2$$

où i est l'indice de p_0 .

Une carte vérifiant la conclusion du théorème ci-dessus sera appelée *carte de Morse* pour f au voisinage de p_0 .

Démonstration de la proposition 5.4. On indique d'abord pourquoi la première partie de la proposition est tautologique. On note Z_M la section nulle de T^*M et 0_x l'origine de T_x^*M . La section précédente a décrit une décomposition $T_{0_x} T^*M \simeq T_{0_x} Z_M \oplus T_x^*M$ pour tout x . Elle induit un isomorphisme $T_x^*M \simeq \nu_{0_x} Z_M$. Par construction, la hessienne d'une fonction f en un point critique est la forme quadratique associée à la composition de $T_x df$ et de la projection $T_{0_x} Z_M \oplus T_x^*M \rightarrow T_x^*M$. La transversalité de df sur Z_M est donc équivalente à la surjectivité de cette composition. Vu l'égalité des dimensions de $T_x M$ et T_x^*M , cette surjectivité est équivalente à la non-dégénérescence de la hessienne.

On passe maintenant à la construction des cartes de Morse. Le lemme crucial est que l'action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur les formes bilinéaires symétriques admet des sections locales au voisinage de toute forme non dégénérée.

Lemme 5.5. Soit E un \mathbb{R} -ev de dimension finie et B_s l'espace des formes bilinéaires symétriques sur E . Toute forme b_0 dans B_s non dégénérée admet un voisinage ouvert V et une application $P: V \rightarrow GL(E)$ telle que, $b = b_0(P(b)\cdot, P(b)\cdot)$ pour tout b dans V .

Démonstration. On pose $\varphi(P) = b_0(P\cdot, P\cdot)$. On dérive cette fonction en l'identité grâce au calcul :

$$\varphi(\text{Id} + H) - \varphi(\text{Id}) = b_0(H\cdot, \cdot) + b_0(\cdot, H\cdot) + b_0(H\cdot, H\cdot)$$

qui montre que $D\varphi(\text{Id})(H) = b_0(H\cdot, \cdot) + b_0(\cdot, H\cdot)$. Le noyau de cette différentielle est constituée des endomorphismes b_0 -antisymétriques tandis qu'elle induit un isomorphisme

5. Théorie de Morse

de l'espace F des endomorphismes b_0 -symétriques sur B_s (il est surjectif car b_0 est supposée non dégénérée). Le théorème d'inversion locale appliqué à la restriction de φ à $\text{Id} + F$ fournit l'inverse P demandé. Comme $P(b_0) = \text{Id}$ et que $\text{GL}(E)$ est ouvert, on peut, quitte à rétrécir V , assurer que $P(V)$ est contenu dans $\text{GL}(E)$. \square

On revient maintenant au lemme de Morse. On commence avec une carte quelconque centrée en p_0 et on cherche un changement de carte. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a $f(y) = f_0 + b_y(y, y)$ où

$$b_y = \int_0^1 (1-t) \text{Hess}_{ty} f dt.$$

En particulier $b_0 = \frac{1}{2} \text{Hess}_0 f$ est non dégénérée (et de même indice que $\text{Hess}_0 f$). Le lemme précédent fournit alors une application P d'un voisinage de l'origine vers $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $b_y = b_0(P(y), P(y))$. Ainsi $f(y) = f_0 + b_0(Q(y), Q(y))$ où $Q(y) = P(y)y$. Comme la différentielle de Q en l'origine vaut P_0 qui est inversible, il existe un difféomorphisme ψ entre voisinages de l'origine tel que $f(\psi(x)) = f_0 + b_0(x, x)$. Par ailleurs le théorème d'inertie de Sylvester fournit une base dans laquelle b_0 est représentée par une matrice diagonale dont la diagonale est constituée de -1 puis de 1 , en nombres dictés par l'indice de b_0 . La composée de ψ avec le changement de base correspondant donne le changement de carte recherché. \square

La proposition précédente assure que les indices des points critiques d'une fonction de Morse sont liés à la topologie globale de la variété.

Corollaire 5.6. *Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété orientée et Z_M la section nulle de T^*M . Si x est d'indice i alors $\#_x(df, Z_M) = (-1)^i$. Si de plus M est compacte et sans bord alors la somme alternée des nombres $c_i(f)$ de points critiques d'indice i est la caractéristique d'Euler de M :*

$$\sum_{i=0}^{\dim(M)} (-1)^i c_i(f) = \chi(M).$$

Démonstration. Comme au début de la démonstration de la proposition 5.4, on revient à la hessienne vue comme application linéaire de $T_x M$ dans $T_x^* M$, ce dernier étant identifié à $\nu_{0_x} Z_M$. D'après le lemme 5.1, la hessienne de f est bien représentée dans chaque carte par la hessienne classique de l'application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} représentant f (là encore cette hessienne est vue comme allant de \mathbb{R}^n dans $(\mathbb{R}^n)^*$ plutôt que comme forme bilinéaire sur \mathbb{R}^n). En utilisant une carte de Morse fournie par la proposition 5.4, on obtient donc comme représentation l'application suivante de \mathbb{R}^n dans $(\mathbb{R}^n)^*$, modulo un facteur deux qui ne change rien aux questions d'orientation :

$$v \mapsto \left(w \mapsto {}^t v \begin{pmatrix} -1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \end{pmatrix} w \right).$$

Par construction de l'orientation sur T^*M , le nombre d'intersection local $\#_x(df, Z_M)$ est le signe du déterminant de la matrice apparaissant, c'est à dire $(-1)^i$. En faisant la somme de ces contributions locales on obtient, par définition du nombre d'intersection global :

$$\sum_{i=0}^{\dim(M)} (-1)^i c_i(f) = \#(df, Z_M).$$

Or df est homotope à la section nulle $M \rightarrow Z_M$, on peut prendre comme homotopie $t \mapsto tdf$. Ainsi le théorème 4.10 d'invariance du nombre d'intersection par homotopie assure que $\#(df, Z_M) = \#(Z_M, Z_M)$. Il reste à remarquer qu'il existe un difféomorphisme de TM sur T^*M envoyant section nulle sur section nulle en préservant les orientations, ce qui garantit $\#(Z_M, Z_M) = \chi(M)$. L'existence d'un tel isomorphisme découle par exemple du théorème 3.3 qui permet de plonger M dans \mathbb{R}^N . En effet le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^N induit alors sur chaque $T_x M$ un produit scalaire permettant d'identifier $T_x M$ et $T_x^* M$. \square

Théorème 5.7. *L'ensemble des fonctions de Morse sur une variété compacte sans bord M est un ouvert dense dans l'ensemble des fonctions sur M muni de la topologie C^2 .*

On remarque que l'énoncé ci-dessus est exemple de transversalité sous contrainte. Le théorème 4.9 assure que, pour tout $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, on peut déformer df pour la rendre transversale sur la section nulle, mais on veut une déformation parmi les différentielles de fonctions. L'affirmation plus forte qui entrainera la théorème est que la famille $\{df; f: M \rightarrow \mathbb{R}\}$ dans $C^\infty(M, T^*M)$ est universellement transversale.

Démonstration. On montre d'abord l'ouverture. Soit f une fonction de Morse sur M . Comme df est transversale sur la section nulle, ses zéros sont isolés. Par compacité de M , il n'y en a qu'un nombre fini. En chacun de ces points x , la transversalité est équivalente à l'inversibilité d'une application linéaire de la forme $p \circ T_x df: T_x M \rightarrow T_x^* M$. Il en découle que la condition de Morse est ouverte en topologie C^2 .

Soit $\{\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq m\}$ un atlas fini de M , $\{V_i \subset U_i\}$ des ouverts tels que M est aussi la réunion de V_i et qu'il existe des fonctions plateau λ_i à support dans les U_i et valant un sur les V_i (on construit les V_i et λ_i comme dans la démonstration du théorème 3.3). On considère l'espace de paramètres $P = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^m$ et, pour tout f , la famille $F: M \times P \rightarrow T^*M$ définie par :

$$\begin{aligned} F(x, (p_1, \dots, p_m)) &= d \left(f + \sum_i \lambda_i p_i \circ \varphi_i \right) \\ &= df(x) + \sum_i p_i(\varphi_i(x)) d\lambda_i(x) + \lambda_i(x) p_i \circ T_x \varphi_i. \end{aligned}$$

Comme d'habitude, cette formule a un sens car λ_i s'annule partout où φ_i n'est pas défini. D'après la proposition 4.6, il suffit de montrer que F est transversale sur la section nulle de T^*M mais, comme annoncé, il s'agit en fait d'une submersion (elle est donc transversale sur toute sous-variété de T^*M). On note que chaque F_p est une section de T^*M , la

5. Théorie de Morse

différentielle partielle de F dans la direction de M suffit donc à atteindre la « moitié horizontale » de TT^*M . De plus, pour tout x de M , il existe V_i contenant x . La dérivée partielle de F par rapport au p_i correspondant envoie tout vecteur δp_i sur $\delta p_i \circ T_x \varphi_i$, ce qui permet bien d'atteindre toutes les directions tangentes aux fibres de T^*M . \square

5.3. Pseudo-gradients

Dans cette section, on veut étendre aux fonctions (de Morse) sur une variété la notion de champ de vecteurs de gradient familière dans \mathbb{R}^n . Déjà dans le cas de \mathbb{R}^n l'objet qui décrit naturellement les variations à l'ordre un d'une fonction est df qui n'est pas un champ de vecteurs mais un champ de formes linéaires. La définition du gradient euclidien est la formule $df(v) = \langle \nabla f, v \rangle$. En particulier $df(\nabla f)$ est partout positif et s'annule exactement aux points critiques.

L'extension la plus évidente de cette définition à une variété passe par le choix d'une métrique riemannienne, un champ de produits scalaire sur TM . Dans ce chapitre, pour des raisons techniques, cette notion est à la fois trop rigide loin des points critiques et pas assez rigide près des points critiques. On utilisera donc la définition technique suivante.

Définition 5.8. Soit f une fonction de Morse sur une variété M . Un champ de vecteurs X sur M est appelé pseudo-gradient adapté à f si $df(X)$ est strictement positif hors des points critiques de f et si, pour tout point critique, il existe une carte de Morse dans laquelle X devient $-2x_1\partial_{x_1} - \dots - 2x_i\partial_{x_i} + 2x_{i+1}\partial_{x_{i+1}} + \dots + 2x_n\partial_{x_n}$. On dit qu'une telle carte de Morse est adaptée à X .

On note en particulier qu'un pseudo-gradient adapté à f s'annule exactement aux points critiques de f .

Proposition 5.9. Toute fonction de Morse admet un pseudo-gradient adapté.

Démonstration. Soit f une fonction de Morse sur une variété M . La proposition 5.4 fournit une carte de Morse U_i au voisinage de chaque point critique p_i de f . Chacune de ces cartes est livrée avec son pseudo-gradient standard qui n'est autre que le gradient euclidien de la fonction quadratique représentant f . Au voisinage de tout point y régulier, f est une submersion donc la forme normale de la démonstration de la proposition 1.7 fournit une carte V_y dans laquelle f devient $(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1$. Dans une telle carte, ∂_{t_1} est un pseudo-gradient de f . On rassemble les cartes U_i avec suffisamment de cartes $V_j = V_{y_j}$ pour obtenir un atlas localement fini de M . Quitte à en rétrécir un peu les cartes, on peut supposer que chaque p_i n'est contenu que dans la carte U_i , à l'exclusion de toute carte $U_{i'}$ ou V_j . On recolle alors les pseudo-gradients décrits ci-dessus à l'aide d'une partition de l'unité. Loin des points critiques, la condition de pseudo-gradient est définie par une inégalité linéaire ponctuelle. Près des points critiques une seule des fonctions cloches n'est pas nulle donc cette fonction vaut un et le pseudo-gradient modèle est préservé. \square

Soit $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété compacte sans bord M . Soit X un pseudo-gradient adapté à f et soit Φ le flot de $-X$. Pour tout point critique p_0 on

note $W^u(-X, p_0)$ la *variété instable* du champ de vecteurs $-X$ en p_0 :

$$W^u(-X, p_0) = \{p \in M; \Phi_t(p) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} p_0\}.$$

Vu la définition, pour tout voisinage V de p_0 , $W^u(-X, p_0) = \bigcup_{t \geq 0} \Phi_t(W^u(-X, p_0) \cap V)$. Soit i l'indice de p_0 . En prenant comme voisinage V une carte de Morse adaptée à X , dans laquelle $W^u(-X, p_0)$ est le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^i \times \{0\}$, on voit que $W^u(-X, p_0)$ est une sous-variété diffeomorphe à \mathbb{R}^i dans M .

De même on définit la *variété stable* $W^s(-X, p_0)$ en remplaçant $t \rightarrow -\infty$ par $t \rightarrow +\infty$, il s'agit d'une sous-variété diffeomorphe à $\mathbb{R}^{\dim(M)-i}$ dans M .

Proposition 5.10. *Soit X un pseudo-gradient adapté à une fonction de Morse f sur une variété compacte sans bord M et soit Φ son flot. Pour tout point m dans M il existe des points critiques p et q de f tels que $\Phi_t(m)$ tend vers p quand t tend vers $-\infty$ et vers q quand t tend vers $+\infty$. Les points p et q sont différents sauf si m est lui-même un point critique, auquel cas $\Phi_t(m) = m$ pour tout t .*

Démonstration. Si m est un point critique de f alors $X(m) = 0$ et la conclusion est évidente. On suppose donc que m n'est pas un point critique. L'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz assure qu'aucun $\Phi_t(m)$ n'est un point critique. On pose $h(t) = f(\Phi_t(m))$. Sa dérivée est $h'(t) = df(-X)(\Phi_t(m))$ qui est partout strictement négative. Par compacité de M , la fonction f et donc la fonction h sont bornées. Ainsi h admet une limite h_{\pm} quand t tend vers $\pm\infty$. Sur tout compact de M ne contenant pas de point critique, h' est majorée par une constante strictement négative. Ainsi $\Phi_t(m)$ ne reste dans aucun de ces compacts. De plus f n'a qu'un nombre fini de points critiques donc il existe une suite t_k tendant vers $+\infty$ telle que $m_k := \Phi_{t_k}(m)$ converge vers un point critique q avec $f(q) = \lim h(t_k) = h_+$. Pour k assez grand, m_k est dans une carte de Morse autour de q adaptée à X . Dans cette carte d'image $B(0, r) \subset \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i}$, pour un certain $r > 0$, f devient $(x, y) \mapsto f(q) - \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\Phi_t(x, y) = (e^{2t}x, e^{-2t}y)$. On remarque que

$$\frac{d}{dt} \|\Phi_t(x, y)\|^2 = 4e^{4t}\|x\|^2 - 4e^{-4t}\|y\|^2 = -4(f(\Phi_t(x, y)) - f(q)) < 0$$

l'inégalité venant de la discussion de h ci-dessus. Ainsi $\Phi_t(m)$ reste dans $B(0, r)$ pour $t \geq t_k$. Or la formule du flot montre que cela n'est possible que si m_k est de la forme $(0, y)$. On voit alors que $\Phi_t(m)$ converge vers $q = (0, 0)$. Le même raisonnement appliqué à $-f$ montre l'assertion concernant la limite pour t tendant vers $-\infty$. \square

Dans la situation de la proposition, la courbe $\gamma := \Phi(\mathbb{R} \times \{m\})$ est appelée trajectoire de $-X$ reliant p à q . Par définition des variétés stables et instables, γ est incluse dans $W^u(-X, p) \cap W^s(-X, q)$. De plus elle intersecte exactement une fois chaque niveau $f^{-1}(c)$ de f pour $c \in]f(q), f(p)[$.

5.3.1. Lemme de descente des valeurs critique

Le lemme suivant affirme que, sous une certaine condition portant sur la variété instable $W^u(-X, p)$ on peut descendre la valeur critique $f(p)$ sans modifier les points critiques et en gardant le même pseudo-gradient. Lorsque p est un minimum local (i.e. d'indice nul) il n'y a pas de condition à vérifier. La démonstration de ce lemme est assez longue. C'est en partie dû à une disjonction de cas selon l'indice du point critique. Mais il y a aussi une explication commune à beaucoup de démonstrations spécifiques en topologie différentielle : la plus grande partie du travail consiste à décrire précisément la situation puis il y a une idée clef qui est limpide si la description est pertinente.

Lemme 5.11. *Soit X un pseudo-gradient adapté à une fonction de Morse f sur une variété compacte sans bord M . Soit p un point critique de f .*

Si l'indice de p est nul, pour tout nombre positif λ , il existe une homotopie de fonctions de Morse f_u admettant toutes X comme pseudo-gradient, qui commence à $f_0 = f$ et qui se termine par f_1 vérifiant $f_1(p) = f(p) - \lambda$. De plus on peut construire cette homotopie de sorte que $f_u = f$ en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de p .

Si p est d'indice strictement positif, on suppose que $W^u(-X, p)$ contient un disque D lisse dont le bord est dans un niveau $f^{-1}(a)$ avec $a < f(p)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une homotopie de fonctions de Morse f_u admettant toutes X comme pseudo-gradient, qui commence à $f_0 = f$ et qui se termine par f_1 vérifiant $f_1(p) = a + \varepsilon$. De plus on peut construire cette homotopie de sorte que $f_u = f$ en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de D .

Démonstration. Si p est d'indice zéro, le modèle imposé dans une carte centrée en p devient $f(x) = f(p) + \|x\|^2$ et $X = 2 \sum x_k \partial_k$. Soit $\rho: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction plateau qui vaut 1 sur un voisinage de 0, s'annule au-delà de ε et vérifie $\rho'(s) \leq 0$ partout. On pose $f_u(x) = f(x) - u\lambda\rho(\|x\|^2)$. Si ε est assez petit, $f_u - f$ est à support dans la carte de Morse donc f_u s'étend en homotopie globale. De plus $df_u(x) = 2(1 - u\lambda\rho'(\|x\|^2))\langle x, \cdot \rangle$ ne s'annule qu'en l'origine car $-u\lambda\rho'(\|x\|^2) \geq 0$. Hors de l'origine $df_u(X) > 0$. Près de l'origine $df_u = df$. Ainsi on a bien une homotopie parmi les fonctions de Morse admettant X comme pseudo-gradient.

Le cas où p est d'indice $n = \dim(M)$ demande aussi un traitement spécial et ne sera pas utilisé dans la suite, on le laisse donc en exercice.

On suppose maintenant que l'indice i de p est strictement compris entre 0 et n . On note W un voisinage arbitrairement petit de D en dehors duquel on ne doit rien changer. Quitte à le rétrécir on peut supposer qu'il ne contient pas d'autre point critique que p . Dans une carte de Morse adaptée à X autour de p , f devient la fonction définie sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^{n-i}$ qui envoie (x, y) sur $f(p) - \|x\|^2 + \|y\|^2$ et X devient $\sum_k -2x_k \partial_{x_k} + \sum_l 2y_l \partial_{y_l}$. On considère, pour tout $\eta > 0$, le fermé

$$\mathcal{M}_\eta = \{|f - f(p)| \leq \eta\} \cap \{\|x\| \cdot \|y\| \leq \eta\}$$

qu'on appelle modèle de Morse standard d'indice i et de taille η . La famille des \mathcal{M}_η est invariante par homothétie centrée en l'origine et chacun d'entre eux est compact. Ainsi, pour η assez petit, \mathcal{M}_η est contenu dans la carte de Morse considérée et dans W .

Dans ce modèle D devient $\{y = 0\}$ et la variété stable $W^s(-X, p)$ devient $\{x = 0\}$. Le modèle \mathcal{M}_η est une « variété à coins » : sa frontière topologique est constituée d'une partie dite horizontale formée de $\partial_h^+ \mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_\eta \cap \{f = f(p) + \eta\}$ et $\partial_h^- \mathcal{M}_\eta = \mathcal{M}_\eta \cap \{f = f(p) - \eta\}$, et d'une partie dite verticale $\partial_v \mathcal{M} = \mathcal{M}_\eta \cap \{\|x\| \cdot \|y\| = \eta\}$. Les parties horizontales sont des hypersurfaces à bord lisse dans leurs niveaux respectifs. De plus $\partial_h^- \mathcal{M}_\eta$ est un voisinage tubulaire de la sphère $D \cap \{f = f(p) - \eta\}$ dans $\{f = f(p) - \eta\}$. Ce voisinage tubulaire est un fibré trivial contenu dans un voisinage arbitrairement petit de la sphère si η est suffisamment petit. La partie verticale est la réunion des trajectoires de X allant de $\partial \partial_h^- \mathcal{M}$ à $\partial \partial_h^+ \mathcal{M}$. L'intersection $C_\eta^\pm = \partial_v \mathcal{M}_\eta \cap \partial_h^\pm \mathcal{M}_\eta$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{i-1} \times \mathbb{S}^{n-i-1}$ et ces deux produits de sphères forment le lieu des coins de \mathcal{M}_η . Toutes ces propriétés se vérifient directement car tout est explicite dans le modèle, y compris le flot de X .

On va maintenant étendre le modèle le long du disque D . Quitte à diminuer η , toutes les trajectoires de $-X$ issues de $\partial_h^- \mathcal{M}_\eta$ atteignent le niveau $\{f = a\}$ puisque celles issues de $D \cap \partial_h^- \mathcal{M}_\eta$ le font. On note A la réunion de ces trajectoires, arrêtées lorsqu'elles atteignent $\{f = a\}$. Il s'agit d'un compact contenant $\partial_h^- \mathcal{M}_\eta$ et la partie de D située hors de \mathcal{M}_η . On pose $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\eta \cup A$.

Dans $W \setminus \{p\}$, $df(X)$ ne s'annule pas. Donc il existe une fonction ρ partout strictement positive qui coïncide avec $df(X)$ sur un voisinage U de $A \cup \partial_v \mathcal{M}_\eta$ et vaut 1 hors de W . On remplace X par X/ρ . Ce nouveau champ de vecteurs est pseudo-gradient pour les mêmes fonctions et a les mêmes variétés stables et instables, on le note donc X . On a gagné $df(X) = 1$ sur U . Ainsi le flot Φ de $-X$ vérifie $f(\Phi_t(x)) = f(x) - t$ tant que $\Phi_t(x)$ reste dans U . En particulier chaque $\Phi_t(\partial_h^- \mathcal{M}_\eta)$ est un voisinage tubulaire de $D \cap \{f = f(p) - \eta - t\}$ dans $\{f = f(p) - \eta - t\}$.

La frontière de \mathcal{M} admet une description entièrement analogue à celle de \mathcal{M}_η et on emploie des notations analogues. En particulier $\partial_v \mathcal{M}$ est la réunion des trajectoires de X reliant $C^- = \partial \partial_h^- \mathcal{M}$ à $C^+ = \partial \partial_h^+ \mathcal{M} = \partial \partial_h^+ \mathcal{M}_\eta$. On fixe un voisinage tubulaire $C^- \times [-1, 1]$ de C^- dans le niveau $\{f = a\}$. On pose $J = [0, f(p) + \eta - a]$. Quitte à rétrécir l'intervalle $[-1, 1]$, le flot de X restreint à $C^- \times [-1, 1] \times J$ fournit un voisinage tubulaire $C^- \times [-1, 1] \times J$ dans lequel X devient ∂_t et f devient $(c, s, t) \mapsto a + t$. On considère $T = C^- \times [0, 1] \times J \subset \mathcal{M}$ vu comme voisinage collier de $\partial_v \mathcal{M} = C^- \times \{0\} \times J$ dans \mathcal{M} .

On observe que les lignes de niveau de f dans T sont les hypersurfaces $C^- \times [0, 1] \times \{t\}$. L'idée clef consiste à modifier ces lignes de niveaux dans l'intérieur de T parmi les hypersurfaces transversales à $X = \partial_t$. Les lignes de niveau d'origine peuvent s'écrire $C^- \times \Gamma_t$ où t est dans J et Γ_t est le graphe de $\gamma_t : [0, 1] \rightarrow J$ valant identiquement t . De plus toutes les lignes de niveau intersectant \mathcal{M} passent par T sous la forme d'une hypersurface $C^- \times \Gamma_t$ pour un unique t . Ainsi on peut spécifier une homotopie f_u en gardant f hors de \mathcal{M} , en remplaçant les Γ_t par des graphes Γ_t^u de sorte que la nouvelle famille d'hypersurfaces coïncide avec l'ancienne près du bord de T . Les valeurs de chaque nouvelle fonction f_u dans \mathcal{M} sont dictées par celles de f hors de \mathcal{M} et X reste transversal aux lignes de niveaux donc pseudo-gradient.

On choisit pour Γ_t^u le graphe de $s \mapsto t + u\chi(s)\lambda(t)(f(p) - a - \varepsilon)$ où χ et λ sont deux fonctions plateau qui s'annulent au voisinage de 0, χ vaut 1 au voisinage de 1 tandis que $\lambda(t)$ vaut 1 dès que t dépasse $\varepsilon/2$. Pour $u = 1$, la ligne de niveau $\{f = a + \varepsilon\}$ devient

5. Théorie de Morse

raccordée à l'ancienne ligne de niveau critique $\{f = f(p)\}$ donc à p comme souhaité. \square

5.3.2. Lemme de modification des nappes

On rappelle qu'une isotopie d'une variété M est une application $\varphi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ telle que chaque $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$ est un difféomorphisme de M et $\varphi_0 = \text{Id}$.

Lemme 5.12. *Soit c une valeur régulière d'une fonction de Morse f sur une variété compacte sans bord M . On pose $\Sigma = f^{-1}(c)$. Soit X un pseudo-gradient adapté à f , p un point critique de f et $S = \Sigma \cap W^u(X, p)$. Pour toute isotopie φ de Σ , il existe une homotopie X_t de pseudo-gradients adaptés à f qui commence avec $X_0 = X$, coïncide avec X hors d'un voisinage arbitrairement petit de Σ et vérifie $\Sigma \cap W^u(X_t, p) = \varphi_t(S)$. Si l'isotopie reste proche de l'identité alors X_t reste proche de X .*

Démonstration. Comme c est une valeur régulière de f , Σ est une hypersurface lisse de M au voisinage de laquelle $df(X)$ ne s'annule pas. On peut donc remplacer X par $X/df(X)$ sans changer $W^u(X, p)$ et assurer ainsi que, toujours au voisinage de Σ , le flot Φ de X vérifie $f(\Phi_s(q)) = f(q) + s$. La restriction de ce flot $I \times \Sigma$, $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$, fournit un voisinage tubulaire de Σ dans lequel f devient $(s, \sigma) \mapsto c + s$, X devient ∂_s et $W^u(X, p)$ devient $I \times S$.

Soit $\rho : I \rightarrow [0, 1]$ une fonction qui s'annule pour $s \leq -\varepsilon/2$ et vaut un à partir de $s = -\varepsilon/4$. Soit Ψ_t le difféomorphisme de $I \times \Sigma$ qui envoie (s, σ) sur $(s, \varphi_{t\rho(s)}(\sigma))$. On pose $X_t = T\Psi_t(X)$. Comme Ψ_t commute à la projection de $I \times \Sigma$ sur I , la composante sur I de X_t vaut toujours ∂_s et X_t est un pseudo-gradient adapté à f . Sa variété instable $W^u(X_t, p)$ rencontre le voisinage tubulaire le long de $\Psi_t(I \times S)$ dont l'intersection avec $\Sigma = \{0\} \times \Sigma$ est bien $\varphi_t(S)$.

Pour contrôler le support de l'homotopie, il suffit de réduire ε . \square

5.4. Fonctions de Morse ordonnées et scindements de Heegaard

On dit qu'une fonction de Morse f est ordonnée si l'ordre sur les points critique donné par la valeur de f est plus fin que celui donné par l'indice : pour toute paire (p, p') de points critiques de p , $f(p) < f(p')$ dès que $\text{ind}(p) < \text{ind}(p')$. Le théorème de transversalité de Thom permet d'appliquer les lemmes de modifications des variétés instables et de descente des valeurs critiques pour ordonner n'importe quelle fonction de Morse sur une variété compacte.

Théorème 5.13. *Toute variété compacte sans bord admet une fonction de Morse ordonnée.*

Démonstration. Soit f une fonction de Morse sur M , fournie par le théorème 5.7 et un pseudo-gradient X adapté à f et fourni par la proposition 5.9. Montrons qu'on peut modifier X de sorte qu'aucune trajectoire de $-X$ n'aille d'un point critique d'indice i vers un point critique d'indice $j \geq i$.

5.4. Fonctions de Morse ordonnées et scindements de Heegaard

Soit γ une trajectoire de $-X$ allant d'un point critique p d'indice i vers un point critique q d'indice j . Soit c une valeur régulière de f vérifiant $f(q) < c < f(p)$ et soit $\Sigma = f^{-1}(c)$ le niveau régulier correspondant. Comme γ va de p vers q , elle est incluse dans $W^u(-X, p) \cap W^s(-X, q)$ et intersecte Σ . On pose $S_D = W^u(-X, p) \cap \Sigma$ et $S_M = W^s(-X, q) \cap \Sigma$. Comme $-X$ est transversal à Σ , ses variétés stables et instables le sont aussi. Ainsi S_D est une sous-variété de dimension $i-1$ et S_M de dimension $n-j-1$ dans Σ qui est de dimension $n-1$ si n est la dimension de M . D'après le théorème 4.9, il existe une isotopie arbitrairement proche de l'identité qui envoie S_D sur une sous-variété transversale à S_M . Sous l'hypothèse $j \geq i$, on a $\dim(S_D) + \dim(S_M) < \dim(\Sigma)$ donc l'intersection devient vide. Or le lemme 5.12 permet de réaliser l'isotopie de S_D par une homotopie de X . On obtient ainsi un nouveau pseudo-gradient n'ayant aucune trajectoire de p vers q . On traite ainsi toutes les paires de points critiques avec $j \geq i$. La modification effectuée pour chaque paire est arbitrairement petite et la condition d'intersection vide est évidemment ouverte donc le travail effectué lors des modifications précédentes est préservé.

Une fois ces mauvaises trajectoires de gradient éliminées, il n'y a plus aucune obstruction à appliquer le lemme 5.11 pour descendre les valeurs critiques, sans changer de pseudo-gradient, jusqu'à avoir une fonction ordonnée. \square

On va déduire de l'existence d'une fonction de Morse ordonnée un théorème de structure pour les variétés de dimension 3. On donne d'abord une définition un peu vague puis on en précisera les termes. Soit M une variété de dimension 3 compacte sans bord. Une *surface de Heegaard* de M est une sous-variété Σ de dimension 2 dans M dont le complémentaire a deux composantes connexes, chacune d'entre elles se rétractant sur un graphe.

Un graphe dans une variété M est une réunion Γ de points s_i (appelés sommets) et de sous-variétés a_j de dimension un (appelées arêtes) telle que l'adhérence de la réunion des a_j est Γ et que tout sommet s_i est dans le domaine d'une carte dans laquelle les a_j deviennent rectilignes et de directions distinctes. Dans les cas qui nous intéressent, il n'y aura qu'un nombre fini de sommets et d'arêtes.

Un rétraction d'un espace topologique A vers un sous-espace B est une application continue $r: A \rightarrow B$ telle que $r(b) = b$ pour tout b dans B .

Théorème 5.14. *Toute variété de dimension 3 connexe, compacte, sans bord admet une surface de Heegaard.*

Démonstration. Soit M la variété considérée. Le théorème 5.13 fournit une fonction de Morse ordonnée f sur M . Soit c une valeur régulière de f telle que tout point critique p de f ait une valeur $f(p)$ inférieure ou supérieure à c selon que l'indice $\text{ind}(p)$ est inférieur à 1 ou supérieur à 2. On pose $\Sigma = f^{-1}(c)$, ce sera la surface de Heegaard promise. On note $H_- = f^{-1}(]-\infty, c])$ et $H_+ = f^{-1}(]c, +\infty[)$.

Soit X un pseudo-gradient adapté à f et φ le flot de $-X$. On note immédiatement que H_- est invariant par tous les φ_t pour $t \geq 0$ car $f \circ \varphi_t$ est décroissante en t . D'après la proposition 5.10, pour tout point q de H_- , $\varphi_t(q)$ tend vers un point critique, nécessairement contenu dans H_- . En particulier les variétés instables $a_i = W^u(X, p_i)$ des points

5. Théorie de Morse

critiques p_i d'indice 1, qui sont de dimension 1, s'accumulent sur des points critiques contenus dans H_- . De plus le modèle local imposé pour X fournit des cartes dans lesquelles ces a_i sont rectilignes. On a bien obtenu un graphe Γ_- formé des points critiques d'indice 0 ou 1 et des variétés instables des points d'indice 1. Le fait que tous les points critiques dans H_- soient d'indice 0 ou 1 assure que le flot φ pousse tout H_- sur Γ_- :

$$\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(H_-) = \Gamma_-.$$

Ainsi $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t$ ressemble à une rétraction de H_- sur Γ_- mais bouge les points contenus dans les arêtes de Γ_- , il faut donc travailler encore un peu. Soit K un voisinage compact de Γ . Pour tout x dans H_- , on note $t(x)$ le premier t tel que $\varphi_t(x)$ soit dans K . On obtient ainsi une rétraction $\theta: H_- \rightarrow K$ qui envoie x sur $\varphi_{t(x)}(x)$. Il reste à construire un voisinage K qui se rétracte sur Γ , c'est l'objet du lemme 5.15 ci-dessous. Ensuite on compose les deux rétractions pour rétracter H sur Γ . Le même raisonnement appliqué à $-f$ montre que H_+ se rétracte aussi sur un graphe.

Il ne reste qu'à expliquer pourquoi H_- est connexe (un raisonnement analogue montre que H_+ l'est aussi). Soit x_0 et x_1 deux points de H_- . Par connexité de M , il existe un chemin $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ reliant x_0 à x_1 . L'idée est d'utiliser le flot φ pour pousser γ dans H_- . Plus exactement on remplace φ par le flot ψ d'un champ de vecteurs qui coïncide avec $-X$ sur $\{f \geq c - \varepsilon\}$ mais s'annule sur $\{f \leq c - 2\varepsilon\}$ pour un petit $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_j) < c - 2\varepsilon$. Ainsi $\psi_t \circ \gamma$ aura toujours pour extrémités x_0 et x_1 et les variétés stables des points critiques situés dans H_+ ne changent pas. Le point clef est que ψ pousse γ dans H_- sauf si γ intersecte une variété stable d'un point critique dans H_+ . Comme ces points critiques sont d'indices 2 ou 3, les variétés stables à éviter sont de dimension 1 ou 0. Ainsi il suffit que γ soit transversal sur ces variétés pour les éviter. Le théorème 4.9 de transversalité de Thom garantit cela après une petite modification de γ loin de x_0 et x_1 . \square

Lemme 5.15. *Tout graphe ayant un nombre fini de sommets et d'arêtes dans une variété de dimension 3 possède un voisinage qui se rétracte sur lui.*

Démonstration. On considère pour chaque sommet une carte dans laquelle les arêtes sont rectilignes. On met une boule euclidienne fermée autour du sommet dans cette carte. Puis on ajoute un tube difféomorphe à $\mathbb{D}^2 \times a_j$ pour chaque arête pour obtenir K . Le point essentiel¹ est que chaque boule B autour d'un sommet se rétracte sur $\Gamma \cap B$. À tout point x de la boule, on associe la distance $d(x)$ entre x et l'arête la plus proche (qui n'est pas nécessairement unique) et la distance $d'(x)$ à la deuxième arête la plus proche. On peut avoir $d(x) = d'(x)$ si x est équidistant de deux arêtes. On envoie x sur le point $\rho(x)$ de l'arête la plus proche qui a pour norme $(1 - d(x)/d'(x))\|x\|$. Cette définition n'est pas ambiguë car la parenthèse s'annule lorsque x est équidistant de deux arêtes. La même observation montre que ρ est continue sur B . De plus ρ ne bouge pas les points du graphe.

Ces rétractions de boules s'étendent aisément aux tubes autour des arêtes. \square

1. La simplicité de cette démonstration doit beaucoup à une discussion avec Benoît Kloeckner, Frédéric Mazoit et Pierre Jammes.

6. Formes différentielles et intégration

Ce chapitre ouvre la seconde partie du cours. On y introduit les formes différentielles : des objets qui vivent dans les variétés, peuvent être intégrés sur des sous-variétés, et dérivés sans introduire de structure ambiante supplémentaire. Les définitions de ces objets et des opérations qu'on peut leur appliquer sont assez sophistiquées. Il est donc utile de les aborder en ayant en tête quelques situations motivant leur introduction, en attendant d'en voir au chapitre suivant une utilisation d'une nature vraiment nouvelle.

On commence par contempler le théorème fondamental du calcul intégral-différentiel. Pour toute fonction à valeur réelle sur un segment $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Comme toujours, la dimension un empêche de bien voir la géométrie. On considère donc une fonction définie sur un ouvert d'un espace affine \mathcal{E} et une courbe γ de $[a, b]$ dans cet ouvert. La formule précédente appliquée à $f \circ \gamma$ et le théorème de dérivation des fonctions composées donnent :

$$\int_a^b df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Dans cette formule on aimerait voir l'intégrale comme une intégrale sur la courbe $\Gamma = \gamma([a, b])$. Même en ignorant le membre de droite, la formule de changement de variable montre directement que si φ est un difféomorphisme croissant entre un segment $[c, d]$ et le segment $[a, b]$ et $\delta = \gamma \circ \varphi$ alors

$$\int_c^d df_{\delta(s)}(\dot{\delta}(s)) ds = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

Ainsi on peut intégrer la différentielle d'une fonction sur une courbe, sans privilégier de paramétrage de la courbe à condition d'en retenir l'orientation (condition de croissance sur φ), sinon un signe moins apparaît. Mais le résultat ne dépend que des valeurs de la fonction aux extrémités de la courbe. Dans ce chapitre on introduira la classe plus vaste des formes différentielles de degré un. On pourra toujours les intégrer sur des courbes orientées mais le résultat dépendra en général de toute la courbe. Dans les formules ci-dessus, on note que $df_{\gamma(t)}$ est une forme linéaire sur $T_{\gamma(t)}\mathcal{E} \simeq E$, qui se nourrit du vecteur $\dot{\gamma}(t)$. C'est la définition générale d'une forme différentielle de degré un sur \mathcal{E} : une section de $T^*\mathcal{E}$.

On se tourne maintenant vers le calcul vectoriel utilisé en particulier en électromagnétisme. On y rencontre la formule de Green-Ostrogradski qui assure que l'intégrale sur

6. Formes différentielles et intégration

un volume V de la divergence d'un champ de vecteurs est égal au flux de ce champ de vecteurs à travers le bord de V :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \oiint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

et la formule de Kelvin-Stokes (appelée « de Stokes » par les cours de physique élémentaires) qui assure que le flux du rotationnel d'un champ de vecteurs à travers toute surface S est égale à la circulation du champ de vecteurs le long de la courbe bordant S :

$$\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

La parenté avec le théorème fondamental ouvrant cette introduction est claire : l'intégrale d'une sorte de dérivée d'un champ de vecteurs sur une sous-variété coïncide avec l'intégrale du champ de vecteurs sur le bord de la sous-variété. Cependant ces formules utilisent plus que la structure d'espace affine de \mathbb{R}^3 . L'intégrale de volume utilise la mesure, le flux utilise l'élément d'aire $d\vec{S}$ et le produit scalaire, la circulation utilise l'élément de longueur et le produit scalaire. Ce problème apparaît aussi dans la formule de changement de variables (ici on repasse à des notations moins fleuries) :

$$\int_{\varphi(A)} f(x) \, dx_1 \cdots dx_n = \int_A f(\varphi(x)) |\det D\varphi(x)| \, dx_1 \cdots dx_n$$

La complexité de la formule provient du fait qu'on intègre une fonction et que cet objet ne transporte pas sa mesure de volume avec lui. Ainsi la formule de changement de variable doit inclure, en plus de f et $f \circ \varphi$, l'information sur la façon dont φ modifie la mesure. Cette information est le déterminant jacobien $\det D\varphi$. En effet le déterminant d'une famille de vecteurs (v_1, \dots, v_p) dans une base (e_1, \dots, e_p) est, au signe près, le volume du parallélotope $P(v)$ engendré par les v_i dans l'unité de volume fournie par celui engendré par les e_i . En particulier il est non nul si et seulement si le parallélotope $P(v)$ est non dégénéré, c'est-à-dire que les v_i forment une base. Le signe est positif si les deux bases définissent la même orientation et négatif sinon. Ce signe explique la valeur absolue dans la formule de changement de variables. En effet les intégrales sur A et $\varphi(A)$ présupposent une orientation sans se soucier de savoir si φ la préserve (c'est une variante du problème de signe qui apparaissait dans la discussion de l'intégration sur les courbes). Ainsi on peut se passer de la valeur absolue à condition d'intégrer sur un domaine orienté et, pour obtenir une plus jolie formule, il faudrait intégrer un objet qui transporte avec lui un déterminant ou un objet apparenté à un déterminant.

Ainsi une fonction ne consomme pas de vecteur et, sans structure supplémentaire, s'intègre (s'évalue) sur les points. Une forme différentielle de degré un (par exemple la différentielle d'une fonction), consomme un vecteur en chaque point et s'intègre sur les courbes orientées. Les déterminants jacobiens sont des formes multilinéaires alternées s'évaluant sur autant de vecteurs que la dimension de l'espace et apparaissent quand on veut intégrer sur un domaine de dimension maximale. Entre ces extrêmes, on trouve des objets associant à tout point une forme multilinéaire alternée consommant k vecteurs.

Ces « formes différentielles de degré k » s'intègrent sur des sous-variétés orientées de dimension k sans utiliser de produit scalaire ou de mesure. Elles vérifient une formule de changement de variables s'écrivant sobrement

$$\int_A \varphi^* \omega = \int_{\varphi(A)} \omega$$

et le théorème fondamental, la formule de Green-Ostrogradski et la formule de Kelvin-Stokes sont tous des cas particuliers de la formule de Stokes s'écrivant sobrement

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

6.1. Applications multilinéaires

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps \mathbb{K} de caractéristique nulle (dans ce cours seul le corps des nombres réels sera utilisé). On note $\otimes^k V^*$ l'espace vectoriel des formes multilinéaires de V^k dans \mathbb{K} . Il est parfois commode de poser, par convention, $\otimes^0 V^* = \mathbb{K}$. On appelle aussi forme k -linéaires les éléments de $\otimes^k V^*$.

La première opération cruciale sur ces objets généralise la transposée d'une application linéaire.

Définition 6.1. Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Le tiré en arrière ou l'image réciproque d'une forme multilinéaire ω sur F par une application linéaire $f \in L(E, F)$ est la forme multilinéaire sur E notée $f^* \omega$ définie par $f^* \omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_k))$.

On note que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Ainsi, si on note $\mathbf{Ev}_{\mathbb{K}}$ la catégorie des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, on a défini, pour tout entier positif k , un foncteur $\otimes^k (\cdot)^*$ de $\mathbf{Ev}_{\mathbb{K}}^{\text{op}}$ dans $\mathbf{Ev}_{\mathbb{K}}$.

L'action à gauche du groupe de permutations \mathfrak{S}_k sur V^k , définie par $\sigma \cdot (v_1, \dots, v_k) = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$, induit une action à droite sur $\otimes^k V^*$ définie par $(\omega \cdot \sigma)(v_1, \dots, v_k) = \omega(\sigma \cdot (v_1, \dots, v_k))$. On note que, pour toute application linéaire f , $(f^* \omega) \cdot \sigma = f^*(\omega \cdot \sigma)$. On dit qu'une forme multilinéaire ω est *antisymétrique* si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\omega \cdot \sigma = \varepsilon(\sigma) \omega$ où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ . On note que cette condition est vérifiée pour toute permutation si et seulement si elle est vérifiée pour toute transposition, car ces dernières engendrent le groupe des permutations. La multilinéarité implique alors que ω est antisymétrique si et seulement si elle est alternée, c'est-à-dire qu'elle s'annule sur tout k -uplet contenant deux fois le même vecteur (ici il est crucial que la caractéristique de \mathbb{K} soit différente de deux). On appelle *degré* de ω l'entier k .

Les formes multilinéaires antisymétriques constituent un sous-espace vectoriel de $\otimes^k V^*$ noté $\Lambda^k V^*$. L'image réciproque d'une forme antisymétrique par une application linéaire est antisymétrique. On dispose d'un projecteur de $\otimes^k V^*$ sur $\Lambda^k V^*$:

$$\text{Alt} : \omega \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \omega \cdot \sigma$$

6. Formes différentielles et intégration

qui commute aux images réciproques : $f^* \circ \text{Alt} = \text{Alt} \circ f^*$ pour toute application linéaire f . On note que c'est le facteur $1/k!$ dans cette formule (et autre analogue ci-dessous) qui impose de travailler sur un corps de caractéristique nulle.

La somme directe $\bigoplus_{k \geq 0} \bigotimes^k V^*$ est munie d'une loi de composition interne notée \otimes qui est bilinéaire et envoie $\omega \in \bigotimes^k V^*$ et $\eta \in \bigotimes^l V^*$ sur $\omega \otimes \eta \in \bigotimes^{k+l} V^*$ définie par $(\omega \otimes \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \omega(v_1, \dots, v_k)\eta(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$.

Définition 6.2. *Le produit extérieur de deux formes antisymétriques ω et η de degrés respectifs k et l est la forme antisymétrique de degré $k+l$*

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Le produit extérieur est associatif et « commutatif au sens gradué » (on dit aussi parfois « super-commutatif ») : si on note $|\alpha|$ le degré d'une forme multilinéaire α , on a

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha.$$

En particulier $\alpha \wedge \alpha = 0$ si α est de degré impair. Le produit extérieur est une opération fonctorielle : $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On note (e_1^*, \dots, e_n^*) la base duale, il s'agit d'une base de $\Lambda^1 E^* = E^*$. Avec ces notations et le produit extérieur, on peut écrire le déterminant dans la base (e_1, \dots, e_n) comme $e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$. Plus généralement, les facteurs combinatoires incorporés dans les définitions de Alt et du produit extérieur visent à assurer l'associativité et la formule suivante :

$$\forall i_1 < \dots < i_k, \quad (e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 1.$$

De plus ces formes k -linéaires forment une base de $\Lambda^k E^*$, qui est donc de dimension C_n^k (ou $\binom{n}{k}$ en notation anglo-saxonne). En particulier, comme on peut le déduire plus directement, $\bigotimes^k E^*$ est nul pour $k > \dim(E)$.

La dernière opération algébrique sur les formes multilinéaires utile dans notre contexte est le *produit intérieur* d'une forme par un vecteur. Cette opération envoie un vecteur v et une forme ω de degré k sur la forme $v \lrcorner \omega$ de degré $k-1$ définie par

$$(v \lrcorner \omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

On rencontre aussi fréquemment pour $v \lrcorner \omega$ la notation $\iota_v \omega$ dont l'inconvénient est l'encombrement vertical quand v devient plus compliqué.

6.2. Formes différentielles

6.2.1. Définition

Les constructions algébriques de la section précédente peuvent naturellement se faire en famille : elle passent sans problème aux fibrés vectoriels au-dessus d'une variété via les techniques du chapitre 2. On obtient en particulier pour chaque variété M les fibrés $\Lambda^k T^*M$ des formes multilinéaires de degré k sur les espaces tangents à M .

Définition 6.3. Une forme différentielle de degré k sur une variété M est une section du fibré $\Lambda^k T^*M$.

Une forme différentielle ω de degré k est donc la donnée en tout x dans M d'une forme k -linéaire antisymétrique $\omega(x)$ sur $(T_x M)^k$. Par exemple toute fonction $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ et une forme différentielle de degré zéro tandis que sa différentielle df est une forme différentielle de degré un. Afin de limiter la profusion de parenthèses on écrit le plus souvent ω_x plutôt que $\omega(x)$. De même, on note le plus souvent $\omega_x(v)$ plutôt que $\omega_x(v_1, \dots, v_k)$ l'évaluation de ω_x sur un k -uplet de vecteurs v . Toujours pour gagner en concision, on utilise aussi la terminologie « k -forme différentielle », ou même simplement « k -forme », à la place de « forme différentielle de degré k ».

On note $\Omega^k M$ l'espace vectoriel des formes différentielles de degré k sur M . Les définitions des *produits intérieur* et *extérieur* étant purement algébriques, elles s'étendent directement. La somme directe

$$\Omega^\bullet M = \bigoplus_{k=0}^{\dim(M)} \Omega^k M,$$

munie du produit extérieur est appelée algèbre différentielle extérieure de M . On note $|\alpha|$ le degré d'une forme différentielle α .

Le cas particulier des formes différentielles sur un espace affine est important car c'est lui qui intervient lorsqu'on examine la situation dans une carte. Soit \mathcal{E} un espace affine (réel) de dimension n et E l'espace vectoriel dirigeant \mathcal{E} . On rappelle qu'un repère sur \mathcal{E} est une paire $(O, (e_1, \dots, e_n))$ où O est un point de \mathcal{E} et (e_1, \dots, e_n) une base de E . Un repère fournit un système de coordonnées $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{E}$ qui envoie (x_1, \dots, x_n) sur $O + \sum x_i e_i$ et un isomorphisme de fibrés $T\mathcal{E} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Traditionnellement, on note dx_i la forme différentielle de degré un qui, vue via cet isomorphisme, vaut partout e_i^* (forme linéaire appartenant à la base duale). Pour un k -uplet d'entiers $I = (i_1, \dots, i_k)$ tous compris entre 1 et n , on note parfois $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

6.2.2. Image réciproque

Les formes différentielles sur les variétés sont des objets naturels au sens où on peut les transporter par les applications entre variétés. Par contre le transport se fait en sens opposé à celui de l'application. On dit que Ω^\bullet est un foncteur de la catégorie \mathbf{Var}^{op} opposée à la catégorie des variétés dans la catégorie des espaces vectoriels réels¹. Cette inversion de sens est une généralisation de ce qui arrive dans la définition du dual d'un espace vectoriel et de la transposition.

Définition 6.4. Pour toute application $\varphi: M \rightarrow N$ entre variétés, le tiré en arrière ou l'image réciproque par φ est l'application de $\Omega^\bullet N$ dans $\Omega^\bullet M$ définie par $(\varphi^* \omega)_x = (T_x \varphi)^* \omega_{\varphi(x)}$.

1. On parle aussi parfois de « foncteur contravariant » mais cette terminologie semble en voie de disparition.

6. Formes différentielles et intégration

Le fait que les formes différentielles voyagent en sens opposé à celui des points et des vecteurs est facile à comprendre. Une forme différentielle se nourrit de vecteurs tangents pour fabriquer des nombres. L'application tangente $T\varphi$ transporte les vecteurs. Elle permet donc de fabriquer une forme différentielle à sa source à partir d'une forme différentielle à son but. Ainsi il est équivalent de faire voyager les vecteurs ou les formes différentielles mais les sens de voyage sont opposés.

Dans le cas des formes différentielles de degré zéro, c'est-à-dire des fonctions (à valeurs réelles), on retrouve l'opération de composition à droite : $\varphi^*f = f \circ \varphi$. De plus cette opération se comporte bien vis-à-vis de la différentiation des fonctions. Si f est une fonction sur N , sa différentielle df est une 1-forme sur N et le théorème de dérivation des fonctions composées donne $\varphi^*df = d(f \circ \varphi) = d(\varphi^*f)$. On enregistre une trace de cette discussion dans le lemme suivant. Il mentionne aussi la compatibilité avec le produit extérieur, qui est une conséquence directe de sa version purement algébrique.

Lemme 6.5. *Soit M, N et P des variétés, $\varphi: M \rightarrow N$ et $\psi: N \rightarrow P$ des applications. On a $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$. Pour toute fonction f sur N , $\varphi^*df = d(\varphi^*f)$, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0 N & \xrightarrow{\varphi^*} & \Omega^0 M \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ \Omega^1 N & \xrightarrow{\varphi^*} & \Omega^1 M \end{array}$$

Pour toutes formes différentielles α et β sur N , on a $\varphi^(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$.*

6.2.3. Formes différentielles à support compact

Le *support* ω sur M est l'adhérence de l'ensemble des points x de M pour lesquels ω_x n'est pas nul dans $\Lambda^k T_x^*M$. On note $\Omega_c^\bullet M$ la sous-algèbre de $\Omega^\bullet M$ formée des formes différentielles à support compact.

En général la propriété d'avoir un support compact n'est pas préservée par image réciproque ; mais c'est le cas si l'application est propre, c'est-à-dire que l'image inverse d'un compact est compacte. Ainsi Ω_c^\bullet est un foncteur si on prend comme catégorie de départ \mathbf{Var}_c^{op} , où \mathbf{Var}_c est la catégorie dont les objets sont toutes les variétés mais dont les flèches sont constituées des applications propres uniquement.

6.3. Intégration

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et ω une n -forme à support compact dans U . Pour tout mesurable $A \subset U$, on définit $\int_A \omega$ comme l'intégrale sur A de la fonction $x \mapsto \omega_x(e_1, \dots, e_n)$ où les e_i sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Le lemme suivant, qui est une reformulation du théorème de changement de variable, justifie cette définition. Comme on va le voir, il permet l'intégration des formes différentielles sur les variétés.

Lemme 6.6. *Pour tout difféomorphisme préservant l'orientation $\varphi : U \rightarrow V$, toute n -forme ω sur V , et tout mesurable $A \subset U$, on a*

$$\int_A \varphi^* \omega = \int_{\varphi(A)} \omega.$$

Démonstration. On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . On écrit $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ où $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \omega_x(e)$. Par définition $\int_{\varphi(A)} \omega = \int_{\varphi(A)} f(x) dx$ où dx désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . Par ailleurs, toujours par définition, $(\varphi^* \omega)_x(e) = \omega_{\varphi(x)}(D\varphi_x(e)) = f(\varphi(x)) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(D\varphi_x(e))$. Or on a vu que $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ n'est autre que le déterminant dans la base e . Ainsi $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n(D\varphi_x(e))$ n'est autre que le déterminant jacobien intervenant dans la formule de changement de variables. Il n'y a pas de valeur absolue à ajouter car φ est supposé préserver l'orientation, ce qui signifie que son déterminant jacobien est positif. \square

Ce lemme utilise implicitement le fait que tout difféomorphisme de \mathbb{R}^n envoie les ensembles mesurables sur des ensembles mesurables. La même remarque montre qu'il existe une notion bien définie d'ensemble mesurable dans une variété : un ensemble $A \subset M$ est mesurable si ses images par toutes les cartes d'un atlas dénombrable est mesurable. Dans ce cours on intégrera presque toujours sur la variété entière ou, plus rarement, sur des ouverts ou des fermés.

Théorème 6.7. *Soit M une variété à bord orientée de dimension n et A une partie mesurable de M . Il existe une unique forme linéaire sur $\Omega_c^n(M)$, notée \int_A , qui vérifie les propriétés suivantes :*

- elle coïncide avec l'intégration définie ci-dessus quand M est un ouvert de \mathbb{R}^n
- pour tout difféomorphisme φ préservant l'orientation entre deux variétés orientées M et N , $\int_A \varphi^* \omega = \int_{\varphi(A)} \omega$.

Démonstration. Soit $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n\}$ un atlas orienté de M . Le théorème 3.1 fournit une partition de l'unité $(\rho_i)_i$ subordonnée au recouvrement U_i . On note $\psi_i = (\varphi_i)^{-1}$ et on pose, pour toute n -forme ω à support compact dans M :

$$\int_A \omega = \sum_i \int_{\varphi_i(A)} \psi_i^*(\rho_i \omega). \quad (6.1)$$

On va montrer que le nombre ainsi défini ne dépend ni du choix de l'atlas ni de celui de partition de l'unité. Pour alléger les notations, on va supposer dans toute la suite que $A = M$ (et donc $\varphi_i(A) = V_i$).

Soit donc $\{\varphi'_i : U'_i \rightarrow V'_i\}$ un autre atlas orienté de M et ρ'_i une partition de l'unité subordonnée. Par définition, la réunion de ces deux atlas est encore un atlas orienté, donc pour tous i et j , le changement de carte $\theta_{ij} = \varphi'_j \circ (\varphi_i)^{-1}$ est un difféomorphisme préservant l'orientation de $V_{ij} = \varphi_j(U_i \cap U'_j)$ dans $V'_{ij} = \varphi'_i(U_i \cap U'_j)$. De plus on a $\psi_i = \psi'_j \circ \theta_{ij}$ sur V_{ij} .

6. Formes différentielles et intégration

On peut alors comparer les deux constructions de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\sum_i \int_{V_i} \psi_i^*(\rho_i \omega) &= \sum_i \int_{V_i} \psi_i^* \left(\sum_j \rho'_j \rho_i \omega \right) \\
&= \sum_{ij} \int_{V_{ij}} \psi_i^* (\rho'_j \rho_i \omega) \\
&= \sum_{ij} \int_{V_{ij}} \theta_{ij}^* ((\psi'_j)^*(\rho'_j \rho_i \omega)) \\
&= \sum_{ij} \int_{V'_{ij}} (\psi'_j)^*(\rho'_j \rho_i \omega) \\
&= \sum_{ij} \int_{V'_j} (\psi'_j)^*(\rho'_j \rho_i \omega) \\
&= \sum_j \int_{V'_j} (\psi'_j)^* \left(\sum_i \rho'_j \rho_i \omega \right) \\
&= \sum_j \int_{V'_j} (\psi'_j)^*(\rho'_j \omega).
\end{aligned}$$

La formule de changement de variable découle de cette propriété par transport de structure. En effet, si φ est un difféomorphisme de M dans N alors tout atlas $\{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n\}$ et toute partition de l'unité subordonnée $\{\rho_i\}$ sur M fournit un atlas $\{\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_i) \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n\}$ et une partition de l'unité $\{\rho_i \circ \varphi^{-1}\}$ que l'on peut utiliser pour calculer $\int_N \omega$:

$$\int_M \varphi^* \omega = \sum_i \int_{V_i} \psi_i^*(\rho_i \varphi^* \omega) = \sum_i \int_{V_i} (\varphi \circ \psi_i)^*(\rho_i \circ \varphi^{-1} \omega) = \int_N \omega.$$

Le fait qu'on retrouve l'intégration définie sur \mathbb{R}^n est aussi une conséquence de la construction : il suffit de choisir l'atlas tautologique.

L'unicité est claire car les conditions demandées imposent la validité de l'équation 6.1 de départ. \square

On peut maintenant atteindre l'objectif d'intégrer des formes de degré k quelconque sur une sous-variété de dimension k .

Définition 6.8. Soit M une variété, $N \subset M$ une sous-variété de dimension k à bord et $A \subset N$ une partie mesurable. On suppose que l'inclusion ι de N dans M est propre. Alors on définit l'intégrale d'une k -forme ω à support compact sur A par

$$\int_A \omega := \int_A \iota^* \omega.$$

La naturalité de l'intégration des formes différentielles, c'est-à-dire l'invariance par difféomorphisme dans le théorème 6.7, assure que, pour tout plongement propre $f: X \hookrightarrow M$

et toute forme ω sur M de degré $\dim(X)$, l'intégrale de $f^*\omega$ sur X ne dépend que de l'image de f (et de ω bien sûr, mais pas de la façon dont f paramètre son image). Par ailleurs il faut noter que l'intégrale de $f^*\omega$ est toujours bien définie, même si f est très singulière, et toujours invariante sous l'action des difféomorphismes à la source.

On termine cette section en mentionnant comment les produits intérieurs et extérieurs s'interprètent, dans les cas les plus simples, en termes d'intégration.

Soit M et N des variétés orientées, α et β des formes différentielles à support compact de degré maximal sur M et N respectivement. On peut tirer en arrière α et β par les projections p_M et p_N de $M \times N$ sur M et N respectivement pour obtenir des formes différentielles sur le produit. Si on munit ce dernier de l'orientation produit alors le théorème de Fubini donne :

$$\int_{M \times N} p_M^* \alpha \wedge p_N^* \beta = \left(\int_M \alpha \right) \left(\int_N \beta \right).$$

Cependant il faut noter que, même localement, une forme différentielle n'a en général pas de telle décomposition. Par exemple la 2-forme $\omega = f(x, y) dx \wedge dy$ sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ne se décompose pas en produit extérieur de formes tirées en arrière depuis les deux facteurs, sauf si f peut s'écrire $(x, y) \mapsto g(x)h(y)$.

On passe maintenant au cas du produit intérieur. Soit X un champ de vecteurs sur une variété M et Φ son flot. Soit Σ une sous-variété de dimension k de M et ω une forme de degré $k + 1$ sur M . On suppose que le flot Φ est bien défini sur $I \times \Sigma$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un segment. La définition du flot entraîne que $T\Phi(\partial_t) = X$ et, par exemple en examinant la situation dans des cartes de Σ , on obtient via le théorème de Fubini

$$\int_{I \times \Sigma} \Phi^* \omega = \int_I \left(\int_{\Phi_t(\Sigma)} X \lrcorner \omega \right) dt.$$

Dans le cas où Φ plonge $I \times \Sigma$, par exemple si X est transversal à Σ et I est assez petit, on peut réécrire le membre de gauche $\int_{\Phi(I \times \Sigma)} \omega$ et on obtient le dessin 6.1.

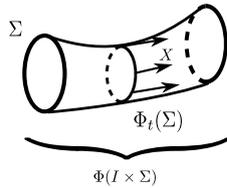


FIG. 6.1.: Sous-variété transportée par le flot de X . L'intégrale de ω sur le tube $\Phi(I \times \Sigma)$ est l'intégrale des intégrales sur les tranches $\Phi_t(\Sigma)$ de $X \lrcorner \omega$.

6.4. Dérivée extérieure et formule de Stokes

6.4.1. Dérivée extérieure sur un espace affine

Dans cette section on travaille sur un espace affine (réel) \mathcal{E} de direction E et de dimension n . Soit ω une forme différentielle de degré $p - 1$ sur un ouvert U de \mathcal{E} . Puisque

6. Formes différentielles et intégration

ω est une application (lisse) de U dans l'espace vectoriel $\Lambda^{p-1}E^*$, elle a, en tout x de U , une différentielle $D\omega_x$ qui va de E dans $\Lambda^{p-1}E^*$. On peut donc l'identifier à l'élément de $\otimes^p E^*$ qui envoie (v_1, \dots, v_p) sur $D\omega_x(v_1)(v_2, \dots, v_p)$. A priori cette forme p -linéaire (toujours notée $D\omega_x$) n'est pas antisymétrique, elle ne vérifie $D\omega_x \cdot \sigma = \varepsilon(\sigma)D\omega_x$ que pour les permutations σ qui fixent 1. Le théorème suivant affirme que l'antisymétrisation de cette forme (à un facteur p près) a une interprétation géométrique qui généralise directement la dérivée d'une fonction comme limite des taux d'accroissements. Du point de vue des formes différentielles, une fonction f est une forme de degré 0 et sa valeur en un point y est l'intégrale de f sur y . Le taux d'accroissement d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entre y et $y + \varepsilon$ est donc vu comme

$$\frac{f(y + \varepsilon) - f(y)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial[y, y+\varepsilon]} f$$

Pour généraliser cela à une forme de degré $p - 1$ il faut intégrer sur le bord d'un objet de dimension p . À tout point x de \mathcal{E} et tout p -uplet de vecteurs $v = (v_1, \dots, v_p) \in E^p$, on associe le paralléloptope

$$P(x; v) = \left\{ x + \sum t_i v_i ; t_i \in [0, 1] \right\}.$$

On note que ce paralléloptope est dégénéré si la famille v n'est pas libre. Même lorsque

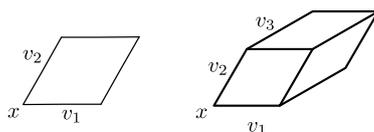


FIG. 6.2. : Parallélotopes engendrés par deux et trois vecteurs

cette famille est libre, ce paralléloptope n'est pas une variété à bord (sauf en dimension un) car il présente des coins. Les deux problèmes sont résolus d'un coup en définissant l'intégrale d'une p -forme sur $P(x; v)$ comme l'intégrale sur $[0, 1]^p$, de la forme tirée en arrière par $\varphi_P: t \mapsto x + \sum t_i v_i$, qui est définie sur un voisinage ouvert de $[0, 1]^p$.

De même on définit :

$$\int_{\partial P(x; v)} \omega = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \left(\int_{\{t_i=1\}} \varphi_P^* \omega - \int_{\{t_i=0\}} \varphi_P^* \omega \right).$$

Le signes apparaissant dans cette définition sont motivés en partie par celui apparaissant dans le taux d'accroissement. Plus fondamentalement, un signe moins devant une intégrale correspond à renverser l'orientation du domaine d'intégration. Les signes de la définition précédente sont alors motivés par l'extension évidente de la convention d'orientation du bord d'une variété à bord, comme on peut le voir sur la figure 6.3.

On peut maintenant énoncer le théorème fournissant la définition de la dérivée extérieure d'une forme différentielle.



FIG. 6.3. : Orientation du bord d'un parallélotope

Théorème 6.9. Soit ω une forme différentielle de degré $p - 1$ sur un ouvert U de \mathcal{E} . Pour tout x dans U et tout p -uplet de vecteurs $v = (v_1, \dots, v_p) \in E^p$, on a la convergence :

$$\frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\partial P(y; \varepsilon v)} \omega \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ y \rightarrow x}]{} p \text{Alt}(D\omega_x)(v).$$

On appelle dérivée extérieure de ω et on note $d\omega$ la forme différentielle $p \text{Alt}(D\omega)$ de degré p sur U apparaissant dans cette limite.

Le lemme central permettant la démonstration du théorème ci-dessus compare l'intégrale d'une forme différentielle sur l'image d'un petit cube avec son évaluation sur les vecteurs dirigeant les arêtes du cube. C'est une conséquence directe des définitions de l'intégrale et de la différentiation.

Lemme 6.10. Soit ω une k -forme sur un ouvert de \mathcal{E} , z un point de cet ouvert et u un k -uplet de vecteurs. On a le développement limité suivant quand ε tend vers 0 :

$$\int_{[0, \varepsilon]^k} \varphi_{P(z, u)}^* \omega = \varepsilon^k \omega_z(u) + \varepsilon^{k+1} R(D\omega(z), u) + o(\varepsilon^{k+1})$$

où R est une application continue de $L(E, \Lambda^k E^*) \times E^k$ dans \mathbb{R} .

Démonstration. On note e_j les éléments de la base canonique de \mathbb{R}^p . On pose $s = \sum u_j$. Pour alléger les notations, on pose $\varphi = \varphi_{P(z, u)}$ et $tu = \sum_j t_j u_j$ de sorte que $\varphi(t) = z + tu$, et on note dt la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^k .

6. Formes différentielles et intégration

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\varepsilon]^k} \varphi^* \omega &= \int_{[0,\varepsilon]^k} \omega_{\varphi(t)}(D\varphi_t(e_1), \dots, D\varphi_t(e_k)) dt \\
&= \int_{[0,\varepsilon]^k} \omega_{\varphi(t)}(u) dt \\
&= \varepsilon^k \int_{[0,1]^k} \omega_{\varphi(\varepsilon t)}(u) dt \\
&= \varepsilon^k \int_{[0,1]^k} \omega_{z+\varepsilon t u}(u) dt \\
&= \varepsilon^k \int_{[0,1]^k} [\omega_z + D\omega_z(\varepsilon t u) + o(\varepsilon)](u) dt \\
&= \varepsilon^k \omega_z(u) + \varepsilon^k D\omega_z \left(\int_{[0,1]^k} \varepsilon t u dt \right) (u) + o(\varepsilon^{k+1}) \\
&= \varepsilon^k \omega_z(u) + \frac{\varepsilon^{k+1}}{2} D\omega_z(s)(u) + o(\varepsilon^{k+1}) \quad \square
\end{aligned}$$

Démonstration du théorème 6.9. Pour tout p -uplet $x = (x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs ou de réels, on note x'_i le $(p-1)$ -uplet obtenu en omettant x_i . Ainsi t'_i est dans $[0, 1]^{p-1}$ et v'_i dans E^{p-1} .

Avec ces notations on a, par définition de l'intégration sur le bord d'un paralléloépe,

$$\frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\partial P(y;\varepsilon v)} \omega = \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \int_{t'_i \in [0,1]^{p-1}} \left[(\varphi_{P(y+\varepsilon v_i, \varepsilon v'_i)})^* \omega - (\varphi_{P(y, \varepsilon v'_i)})^* \omega \right].$$

Vu la définition des φ_P , on a $\varphi_{P(z, \varepsilon v)} = \varphi_{P(z, v)} \circ h_\varepsilon$ où h_ε est l'homothétie de centre l'origine et de rapport ε . Vu la functorialité du tiré en arrière (première partie du lemme 6.5) et la formule de changement de variable (lemme 6.6) on peut réécrire :

$$\frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\partial P(y;\varepsilon v)} \omega = \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \int_{[0,\varepsilon]^{p-1}} \left[(\varphi_{P(y+\varepsilon v_i, v'_i)})^* \omega - (\varphi_{P(y, v'_i)})^* \omega \right].$$

Le lemme 6.10 d'intégration sur un petit cube donne alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\partial P(y;\varepsilon v)} \omega &= \frac{1}{\varepsilon^p} \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \varepsilon^{p-1} \\
&\quad \left[\omega_{y+\varepsilon v_i}(v'_i) + \varepsilon R(D\omega_{y+\varepsilon v_i}, v'_i) \right. \\
&\quad \left. - \omega(y)(v'_i) - \varepsilon R(D\omega_y, v'_i) \right] \\
&= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \frac{1}{\varepsilon} \left[\omega(y + \varepsilon v_i)(v'_i) - \omega(y)(v'_i) \right] + o(1)
\end{aligned}$$

car $y + \varepsilon v_i$ et y dans les termes de reste tendent tous deux vers x . On obtient donc

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ y \rightarrow x}} \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\partial P(y; \varepsilon v)} \omega = \sum_i (-1)^{i+1} D\omega_x(v_i)(v'). \quad (6.2)$$

Cette formule est équivalente à la formule annoncée via le lemme combinatoire suivant, dont on omettra avec profit de lire la démonstration. \square

Lemme 6.11. *Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et η une application p -linéaire de E^p dans \mathbb{R} . Si ε est alternée par rapport à ces $(p-1)$ dernières variables, c'est-à-dire que $\eta \cdot \sigma = \varepsilon(\sigma)\eta$ dès que $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ vérifie $\sigma(1) = 1$, alors*

$$\text{Alt}(\eta)(v_1, \dots, v_p) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \eta(v_i, v'_i)$$

où v'_i est le $(p-1)$ -uplet de vecteurs obtenus en omettant v_i dans (v_1, \dots, v_p) .

Démonstration. On note \mathfrak{S}_p^i l'ensemble des permutations σ vérifiant $\sigma(i) = 1$ et τ_i la transposition échangeant 1 et i . L'observation est que \mathfrak{S}_p est la réunion des \mathfrak{S}_p^i et que $\mathfrak{S}_p^1 = \mathfrak{S}_p^i \cdot \tau_i$ pour tout i . L'hypothèse sur η se reformule en $\eta \cdot \sigma = \varepsilon(\sigma)\eta$ pour tout σ dans \mathfrak{S}_p^1 . On calcule alors

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\eta) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \eta \cdot \sigma \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^p \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p^i} \varepsilon(\sigma) \eta \cdot \sigma \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^p \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p^1} \varepsilon(\sigma' \tau_i) \eta \cdot \sigma' \cdot \tau_i \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^p \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_p^1} \varepsilon(\tau_i) \eta \cdot \tau_i \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \varepsilon(\tau_i) \eta \cdot \tau_i \end{aligned}$$

Bien sûr la signature $\varepsilon(\tau_i)$ vaut -1 sauf pour $i = 1$. On conclut en observant que, pour $i \neq 1$,

$$\begin{aligned} \eta \cdot \tau_i(v_1, \dots, v_p) &= \eta(v_i, v_2, \dots, v_{i-1}, v_1, v_{i+1}, \dots, v_p) \\ &= (-1)^{i-1-2+1} \eta(v_i, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p) \\ &= (-1)^i \eta(v_i, v'_i) \end{aligned}$$

car il faut faire sauter $i-1-2+1$ vecteurs à v_1 pour le remettre en deuxième position, le reste étant déjà dans l'ordre visé. \square

6. Formes différentielles et intégration

Le point crucial pour étendre cette construction des espaces affines aux variétés est qu'elle est naturelle, au sens où elle commute aux tirés en arrière. Dit avec le vocabulaire de la théorie des catégories, d est une transformation naturelle (on dit aussi « morphisme de foncteurs ») entre les foncteurs Ω^k et Ω^{k+1} pour tout k . La figure 6.4 illustre cet énoncé dans lequel le théorème de symétrie de Schwarz joue un rôle crucial.

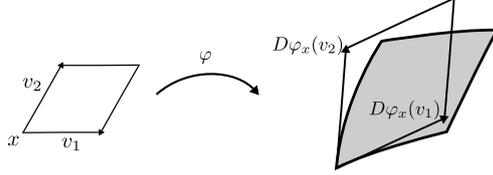


FIG. 6.4.: Naturalité de la dérivée extérieure. Lorsque qu'on passe à la limite, l'intégrale sur le bord du parallélogramme courbe image de $P(x, v)$ par φ coïncide avec celle obtenue au bord du parallélogramme $P(\varphi(x), D\varphi_x(v))$.

Proposition 6.12. *Pour toute application φ entre espaces affines, $\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$.*

Démonstration. On revient à la formule de l'équation 6.2 qui, tirée en arrière par φ , devient

$$\varphi^* d\omega_x(v) = \sum_i (-1)^{i+1} D\omega_{\varphi(x)}(D\varphi_x v_i)(D\varphi_x v'_i)$$

que l'on doit comparer à $d(\varphi^*\omega)_x(v)$. En développant $\varphi^*\omega_{x+v_i}(v'_i)$ à l'ordre un en v_i , on obtient

$$D(\varphi^*\omega)_x(v_i)(v'_i) = D\omega_{\varphi(x)}(D\varphi_x v_i)(D\varphi_x v'_i) + \sum_{j=1}^{p-1} \omega_{\varphi(x)}\left((v'_i)_1, \dots, D^2\varphi_x(v_i, (v'_i)_j), \dots, (v'_i)_{p-1}\right)$$

Le premier morceau est celui attendu mais la somme sur j est un terme qui doit disparaître, après sommation sur i . Ici le point crucial est le théorème de symétrie de Schwarz, qui assure que $D^2\varphi_x$ est symétrique et qui se combine avec l'antisymétrie de ω . Plus précisément on conclut en appliquant le lemme algébrique suivant à $\eta = \omega_{\varphi(x)}$ et $S = D^2\varphi_x$. \square

La démonstration précédente utilise le lemme algébrique suivant, dont il est éclairant de ne pas lire la démonstration. On retiendra simplement que, dans la figure 6.4, les intégrales sur les courbes constituant le bord de $\varphi(P)$ ne correspondent pas directement aux intégrales sur les segments dirigés par les $D\varphi_x(v_i)$ modulo des termes d'ordre supérieurs : il y a des erreurs à l'ordre dominant mais elles se compensent quand on fait tout le tour du parallélogramme grâce au théorème de symétrie de Schwarz. La démonstration du lemme algébrique explique comment s'organisent ces compensations.

Lemme 6.13. *Pour toute forme η dans $\Lambda^{p-1}E^*$, toute application bilinéaire symétrique S de $E \times E$ dans E , et tout p -uplet v dans E^p on a,*

$$\sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^{p-1} \eta\left((v'_i)_1, \dots, S(v_i, (v'_i)_j), \dots, (v'_i)_{p-1}\right) = 0$$

où le terme $S(v_i, (v'_i)_j)$ apparaît en j -ème position.

Démonstration. On note σ la somme étudiée. On commence par réordonner les arguments de η pour que celui faisant intervenir S soit en première position, ce qui demande $j-1$ transpositions. On obtient :

$$\sigma = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{i+j} \eta\left(S(v_i, (v'_i)_j), v''_{i,j}\right)$$

où $v''_{i,j}$ est le $(p-2)$ -uplet obtenu en omettant le j -ème vecteur dans v'_i . Chaque terme de cette double somme fait intervenir exactement une fois chaque vecteur v_k dans l'ordre croissant des indices sauf ceux apparaissant dans S . On note que

$$(v'_i)_j = \begin{cases} v_j & \text{si } j < i \\ v_{j+1} & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

donc

$$\sigma = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j < i} (-1)^{i+j} \eta\left(S(v_i, v_j), v''_{i,j}\right) + \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} \eta\left(S(v_i, v_{j+1}), v''_{i,j}\right) \right)$$

En faisant un décalage d'indice dans la deuxième somme, on obtient :

$$\sigma = \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j < i} (-1)^{i+j} \eta\left(S(v_i, v_j), v''_{i,j}\right) - \sum_{j > i} (-1)^{i+j} \eta\left(S(v_i, v_j), v''_{i,j-1}\right) \right)$$

où dans les deux sommes, les vecteurs apparaissant dans η à partir de la deuxième position sont tous les v_k avec k différent et i et j , rangés dans l'ordre. Ces deux sommes sont donc identiques par symétrie de S donc $\sigma = 0$. \square

La définition fournie par le théorème 6.9 est géométriquement très satisfaisante mais peu maniable concrètement. Il est donc important de voir comment la dérivée extérieure s'exprime dans un repère (lorsque cette notion sera étendue aux variétés, on obtiendra ainsi une expression valable dans n'importe quelle carte).

Proposition 6.14. *Pour tout repère sur \mathcal{E} , on peut écrire $\omega = \sum \omega_I dx_I$ et on a alors :*

$$d\omega = \sum d\omega_I \wedge dx_I.$$

où $d\omega_I$ est la différentielle de la fonction ω_I .

Démonstration. Cela provient directement de la formule du théorème 6.9 et de la définition du produit extérieur :

$$d\omega = p \text{Alt } D\omega = p \text{Alt} \left(\sum d\omega_I \otimes dx_I \right) = \sum p \text{Alt}(d\omega_I \otimes dx_I) = \sum d\omega_I \wedge dx_I. \quad \square$$

6.4.2. Théorème des accroissements finis et formule de Stokes

Le but de cette section est d'établir la formule de Stokes sur un parallélotope :

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega.$$

Par définition de la dérivée extérieure dans le théorème 6.9, cette formule est vraie pour un parallélogramme infinitésimal. La raison pour laquelle elle reste vraie au niveau macroscopique et que les deux membres sont additifs. C'est évident pour l'intégrale sur P . Pour le membre de droite, on observe que, si deux parallélotopes P_1 et P_2 sont juxtaposés avec une face en commun, alors l'intégration sur le bord de leur réunion est la somme des intégrations sur P_1 et P_2 . En effet la face commune apparaît avec des orientations opposées, et donc des signes opposés, comme sur la figure 6.5.

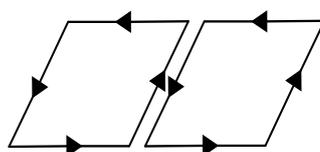


FIG. 6.5.: Deux parallélotopes juxtaposés (sur le dessin un petit interstice permet de voir l'arrête commune avec ses deux orientations).

Comme dans le cas de la dimension 1, une façon très élégante de passer du résultat infinitésimal au résultat macroscopique passe par le théorème des accroissements finis.

Lemme 6.15. *Pour tout parallélotope $P = P(x; v)$ et toute $(p-1)$ -forme ω sur P , il existe un point c dans P tel que*

$$d\omega_c(v) = \int_{\partial P} \omega.$$

Démonstration. L'idée est de se ramener à une suite de parallélotopes de plus en plus petits qui convergent vers le point c recherché.

Sous-lemme 6.16. *Pour tout parallélotope $P = P(x; v)$ et toute $(p-1)$ -forme ω sur P , il existe x' dans P tel que le parallélotope $P' = P(x', v/2)$ soit inclus dans P et vérifie*

$$\int_{\partial P} \omega = 2^p \int_{\partial P'} \omega.$$

Démonstration. On découpe P en 2^p parallélotopes dont les vecteurs directeurs sont les $v_i/2$. Plus précisément, à chaque ε dans $\{0, 1\}^p$, on associe $x_\varepsilon = x + \sum \varepsilon_i v_i/2$ et le parallélotope $P_\varepsilon = P(x_\varepsilon; v/2)$. On a $\int_{\partial P} \omega = \sum \int_{\partial P_\varepsilon} \omega$ qui est la moyenne des $2^p \int_{\partial P_\varepsilon} \omega$. Si aucun des x_ε ne convient il existe ε_0 et ε_1 tels que

$$2^p \int_{\partial P_{\varepsilon_0}} \omega < \int_{\partial P} \omega \quad \text{et} \quad 2^p \int_{\partial P_{\varepsilon_1}} \omega > \int_{\partial P} \omega.$$

On pose alors $x_t = (1-t)x_{\varepsilon_0} + tx_{\varepsilon_1}$ pour $t \in [0, 1]$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un t tel que $x' = x_t$ convient. \square

Le sous-lemme précédent fournit par récurrence une suite x_k de points de P et des parallélotopes $P_k = P(x_k; 2^{-k}v)$ inclus dans P et vérifiant $\int_{\partial P} \omega = 2^{kp} \int_{\partial P_k} \omega$. On note c le point limite des P_k (fourni par le théorème des fermés emboîtés). En posant $\varepsilon_k = 2^{-k}$, qui tend vers zéro, on a

$$\int_{\partial P} \omega = \lim_k \frac{1}{\varepsilon_k^p} \int_{\partial P(x_k; \varepsilon_k v)} \omega = d\omega_c(v_1, \dots, v_p). \quad \square$$

On en déduit comme promis la formule de Stokes sur un parallélotope.

Corollaire 6.17. *Pour toute $p-1$ forme ω sur un ouvert de \mathcal{E} et tout parallélotope P dans U :*

$$\int_P d\omega = \int_{\partial P} \omega.$$

Démonstration. Vu la définition de l'intégration sur un parallélotope et la naturalité de la dérivée extérieure (qui ici ne nécessite pas le lemme 6.13 puisque φ_P est linéaire), on peut remplacer P par le cube $[0, 1]^p$. On note $e = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p . Par définition de l'intégration d'une p -forme sur une partie de \mathbb{R}^p , on a

$$\int_{[0,1]^p} d\omega = \int_{[0,1]^p} d\omega_t(e) dt.$$

La fonction intégrée dans le membre de droite est continue donc cette intégrale est limite de ses sommes de Riemann : pour toute suite P_j^i de partitions en sous-cubes P_j^i de volumes $|P_j^i|$ tendant vers zéro et toute suite de points t_j^i dans P_j^i , on a

$$\int_{[0,1]^p} d\omega = \lim_i \sum_j |P_j^i| d\omega_{t_j^i}(e).$$

On choisit les P_j^i dirigés par les $2^{-i}e_k$, de sorte qu'ils sont de volume 2^{-pi} . Le théorème des accroissements finis (lemme 6.15) fournit des points t_j^i tels que

$$\int_{\partial P_j^i} \omega = d\omega_{t_j^i}(2^{-i}e) = |P_j^i| d\omega_{t_j^i}(e)$$

C'est exactement le terme apparaissant dans la somme de Riemann donc, en utilisant l'additivité de l'intégrale sur le bord :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^p} d\omega &= \lim_i \sum_j \int_{\partial P_j^i} \omega \\ &= \lim_i \int_{\partial [0,1]^p} \omega \\ &= \int_{\partial [0,1]^p} \omega. \end{aligned} \quad \square$$

6. Formes différentielles et intégration

La formule de Stokes sera étendue aux variétés à bord dans la section suivante mais on peut déjà en déduire une démonstration éclairante du corollaire suivant. Ce corollaire est l'observation fondamentale qui permet l'existence de la cohomologie de de Rham développée dans le chapitre suivant.

Corollaire 6.18. $d \circ d = 0$.

Bien sûr on peut démontrer cette égalité de façon algébrique mais le but de la démonstration ci-dessous est d'expliquer qu'elle est duale au fait géométriquement limpide que le bord d'un domaine (éventuellement à coins) est une hypersurface sans bord.

Démonstration. Pour toute forme de degré $p - 1$ et tous vecteurs v_1, \dots, v_{p+1} .

$$\begin{aligned} dd\omega_x(v_1, \dots, v_{p+1}) &= \lim_{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} \int_{\partial P(x, \varepsilon v)} d\omega \\ &= \lim_{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^{p+1}} \int_{\partial \partial P(x, \varepsilon v)} \omega \\ &= 0. \end{aligned}$$

où la première égalité provient de la définition de la dérivée extérieure tandis que la deuxième provient de la formule de Stokes. La troisième égalité provient du fait que $\partial \partial P = \emptyset$. Plus rigoureusement, quand on applique deux fois la définition de l'intégration sur le bord d'un paralléloèdre, chaque face de codimension 2 apparaît exactement deux fois, avec des orientations opposées. \square

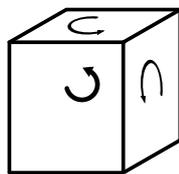


FIG. 6.6.: Le bord du bord. On a représenté les orientations de trois des faces de ce cube. Les trois arêtes communes à deux de ces faces héritent chacune de deux orientations opposées.

6.4.3. Dérivée extérieure sur une variété

Vu la proposition 6.12, on peut définir la dérivée extérieure des formes différentielles sur une variété en rapatriant celle des espaces affines par les cartes. La proposition assure l'indépendance du choix de carte. On obtient du même coup la naturalité de la dérivée extérieure sur une variété. La proposition suivante précise aussi son comportement vis à vis de la structure d'algèbre : on dit qu'il s'agit d'une dérivation graduée, ou qu'elle satisfait la *formule de Leibniz graduée*. Cette formule découle immédiatement de la formule de Leibniz usuelle pour les fonctions et de l'expression dans un repère fournie par la proposition 6.14.

Proposition 6.19. *Pour toute application f entre variétés, $f^* \circ d = d \circ f^*$. Pour toutes formes différentielles α et β , on a $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$.*

Enfin on obtient la *formule de Stokes* visée, conséquence directe de celle obtenue sur un paralléloétope via de l'existence des partitions de l'unité et la naturalité des opérations d'intégration et de dérivée extérieure.

Théorème 6.20. *Soit M une variété à bord orientée de dimension n . Pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$,*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Démonstration. Montrons que la naturalité de l'intégration et de la dérivée extérieure permettent de localiser la discussion par partition de l'unité. Soit $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_+^n\}$ un atlas localement fini de M et $\{\rho_i : M \rightarrow [0, 1]\}$ un partition de l'unité subordonnée au recouvrement par les U_i et fournie par le théorème 3.1. Quitte à composer chaque φ_i par un difféomorphisme radial entre \mathbb{R}^n et la boule centrée en l'origine et de rayon 1, on peut supposer que chaque $V_i = \varphi_i(U_i)$ est contenu dans cette boule. Le mot « radial » dans la phrase précédente assure que le bord de M est bien envoyé dans $\partial\mathbb{R}_+^n$ après cette modification. On localise les deux côtés de la formule. D'une part on obtient :

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_i \rho_i \omega\right) = \sum_i \int_{U_i} d(\rho_i \omega) \\ &= \sum_i \int_{V_i} (\varphi_i^{-1})^* d(\rho_i \omega) \\ &= \sum_i \int_{V_i} d[(\varphi_i^{-1})^*(\rho_i \omega)] \end{aligned}$$

en utilisant la naturalité de l'intégration pour passer à la deuxième ligne et celle de la dérivation pour passer à la troisième. D'autre part, en gardant les mêmes notations pour les restrictions de φ_i et ρ_i au bord de M , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \omega &= \int_{\partial M} \sum_i \rho_i \omega = \sum_i \int_{\partial M \cap U_i} \rho_i \omega \\ &= \sum_i \int_{\partial V_i} (\varphi_i^{-1})^*(\rho_i \omega) \end{aligned}$$

Chaque $\omega_i := (\varphi_i^{-1})^*(\rho_i \omega)$ est une forme différentielle sur \mathbb{R}^n ou \mathbb{R}_+^n à support dans la boule de rayon 1 autour de l'origine et le corollaire 6.17 permet de conclure. Plus précisément, dans le cas des ouverts U_i n'intersectant pas le bord, on applique le corollaire au cube $[-2, 2]^n$ pour conclure que l'intégrale de $d\omega_i$ est nulle (car ω_i est nulle au voisinage du bord du cube). Dans le cas des ouverts intersectant le bord, on applique le corollaire au cube $[-2, 0] \times [-2, 2]^{n-1}$. La seule contribution à l'intégrale de ω_i provient de la face $\{0\} \times [-2, 2]^{n-1}$ car ω_i est nulle au voisinage des autres. \square

6.5. Exercices

Exercice 6.1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n . Une forme dans $\Lambda^k E^*$ est dite décomposable si elle s'écrit comme produit extérieur de k formes linéaires. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est indécomposable. Montrer que toute forme de degré n ou $n - 1$ est décomposable (indication : pour ω une n -forme non nulle sur E , on pourra considérer l'application linéaire $X \mapsto X \lrcorner \omega$ de E dans $\Lambda^{n-1} E^*$). Soit α une forme linéaire sur E . Montrer qu'une forme $\omega \in \Lambda^p E^*$ s'écrit $\omega = \alpha \wedge \eta$ si et seulement si $\alpha \wedge \omega = 0$. Soient α, β, γ et δ des formes linéaires indépendantes sur E . Montrer que $\omega = \alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$ est indécomposable.

Exercice 6.2. Soit ω et η des formes multilinéaires antisymétriques sur un espace vectoriel E , soit u et v des vecteurs de E . Comparer $u \lrcorner (v \lrcorner \omega)$ et $v \lrcorner (u \lrcorner \omega)$. Calculer $u \lrcorner (\omega \wedge \eta)$.

Exercice 6.3. Montrer qu'une variété de dimension n est orientable si et seulement si elle admet une forme différentielle de degré n qui ne s'annule nulle part. Une telle forme est appelée forme volume.

Soit ω une forme volume sur une variété orientée M . Montrer que $\int_M \omega$ est non nulle.

Exercice 6.4. Soit M une variété orientée et \bar{M} la même variété munie de l'orientation opposée. Montrer que, pour toute forme ω à support compact et de degré maximal sur M , $\int_{\bar{M}} \omega = -\int_M \omega$ (on pourra montrer que si $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ est un atlas orienté de M et σ une réflexion hyperplane dans \mathbb{R}^n alors $\{\sigma \circ \varphi_i\}$ est un atlas orienté pour \bar{M}).

Exercice 6.5. On note p l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 définie par $p(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et α la 1-forme sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par :

$$\alpha = \frac{1}{x^2 + y^2} (-ydx + xdy).$$

Calculer $p^* \alpha$. Calculer l'intégrale de α sur le cercle unité centré en l'origine. Est-ce que α est la différentielle d'une fonction ? Et si on retire à \mathbb{R}^2 une demi-droite issue de l'origine ? Calculer la dérivée extérieure de α .

Exercice 6.6. Soit S une surface dans \mathbb{R}^3 et N une section unitaire du fibré vectoriel TS^\perp (unitaire et orthogonal se rapportent au produit scalaire euclidien canonique sur \mathbb{R}^3). On oriente S de sorte que N suivi d'une base directe de TS donne une base directe de \mathbb{R}^3 en tout point de S . On note ω la forme volume $dx \wedge dy \wedge dz$. Montrer que $\alpha = N \lrcorner \omega|_S$ est une 2-forme sur S qui ne s'annule nulle part. Soit φ un paramétrage local de S , c'est à dire une immersion d'un ouvert U du plan dans \mathbb{R}^3 dont l'image est contenue dans S et φ définit la bonne orientation. Les cours de géométrie différentielle élémentaires définissent l'intégrale d'une fonction f sur $\varphi(U)$ par rapport à la « mesure de surface » de S comme l'intégrale sur U de la fonction $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v)) \|\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi\|$ où \wedge désigne ici le produit vectoriel sur \mathbb{R}^3 . Montrer que cette intégrale n'est autre que l'intégrale sur $\varphi(U)$ de $f \alpha$.

Exercice 6.7. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de non-rétraction de Brouwer (et donc aussi son corollaire le théorème de point fixe de Brouwer) comme conséquence de la formule de Stokes.

Soit M une variété compacte à bord non vide et orientable. D'après l'exercice 6.3, ∂M porte une forme différentielle ω de degré $\dim(\partial M)$ qui ne s'annule nulle part. Montrer que l'intégrale de ω sur ∂M est non nulle. On suppose par l'absurde qu'il existe une rétraction de M sur son bord, c'est à dire une application φ de M dans ∂M qui est l'identité en restriction à ∂M . On note ι l'inclusion de ∂M dans M . Montrer que $\iota^* \circ \varphi^*$ est l'identité de $\Omega^{\bullet} \partial M$. En utilisant la formule de Stokes, montrer que l'intégrale de ω sur ∂M est nulle.

Exercice 6.8. Le but de cet exercice est d'expliciter la façon dont la théorie des formes différentielles contient le calcul différentiel vectoriel usuel dans \mathbb{R}^3 .

Soit $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ la forme volume standard sur \mathbb{R}^n . Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et $\mathfrak{X}U$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur U . Soit $X \in \mathfrak{X}U$. Montrer qu'il existe une unique fonction $\operatorname{div} X$ telle que $d(X \lrcorner \omega) = \operatorname{div}(X)\omega$ et calculer $\operatorname{div}(X)$ en fonction des dérivées partielles des composantes de X .

On pose $X^\flat(x) = \langle X(x), \cdot \rangle$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n . Ainsi X^\flat est une 1-forme différentielle sur U . Montrer que cette procédure définit un isomorphisme entre $\mathfrak{X}U$ et $\Omega^1 U$. On note $\alpha \mapsto \alpha^\#$ son inverse.

On suppose maintenant que n vaut 3. Montrer que $A: f \mapsto f\omega$ définit un isomorphisme de $\Omega^0 U$ vers $\Omega^3 U$. Montrer que $B: X \mapsto X \lrcorner \omega$ définit un isomorphisme entre $\mathfrak{X}U$ et $\Omega^2 U$.

Décrire les flèches anonymes dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 U & \xrightarrow{d} & \Omega^1 U & \xrightarrow{d} & \Omega^2 U & \xrightarrow{d} & \Omega^3 U \\ \parallel & & \uparrow \downarrow \# & & \uparrow B & & \uparrow A \\ \Omega^0 U & \longrightarrow & \mathfrak{X}U & \longrightarrow & \mathfrak{X}U & \longrightarrow & \Omega^0 U \end{array}$$

Montrer que les formules de Green-Ostrogradski et de Kelvin-Stokes sont des cas particuliers de la formule de Stokes.

Exercice 6.9. Soit M et N des variétés orientées. On munit $M \times N$ de sa structure de variété discutée dans les exercices du chapitre un, avec son orientation produit. Soit p et q les projections de $M \times N$ sur M et N respectivement. Soit α et β des formes différentielles à support compact de degré maximal sur M et N respectivement. Montrer que

$$\int_{M \times N} p^* \alpha \wedge q^* \beta = \left(\int_M \alpha \right) \left(\int_N \beta \right).$$

7. Cohomologie de de Rham

Le chapitre précédent a introduit les formes différentielles comme étant des objets à intégrer sur des sous-variétés et la dérivée extérieure comme étant l'opération permettant de généraliser le théorème fondamental du calcul intégral-différentiel, la formule de Green-Ostrogradski et la formule de Kelvin-Stokes. Dans ce chapitre on glisse vers des applications beaucoup plus nouvelles de ces objets.

Tout commence par une remarque anodine : le noyau de $d: \Omega^0 M \rightarrow \Omega^1 M$ voit quelque chose de la forme globale de M . En effet, puisque les composantes connexes et connexes par arcs de M coïncident, ce noyau est constitué des fonctions localement constantes (un résultat que l'on voit maintenant comme un corollaire de la formule de Stokes !). Donc $\ker(d: \Omega^0 M \rightarrow \Omega^1 M)$ est un espace vectoriel réel dont la dimension est égale au nombre de composantes connexes de M .

Plus sérieusement, l'exercice concernant $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et

$$\alpha = \frac{1}{x^2 + y^2} (-ydx + xdy).$$

montre qu'une 1-forme vérifiant $d\alpha = 0$ mais qui n'est pas la différentielle d'une fonction peut détecter la présence d'un « trou ». En effet, on a vu que α devient la différentielle d'une fonction « angle en coordonnée polaire » (ou argument si on identifie \mathbb{R}^2 à \mathbb{C}) dès lors qu'on se restreint au complémentaire d'une demi-droite issue de l'origine. C'est cet exemple qui sous-tend le paradoxe de la cascade d'Escher dans l'introduction de ce cours : localement il n'y a pas d'obstruction à trouver une fonction d'altitude dont la différentielle fait couler l'eau comme sur le dessin, mais une contradiction apparaît lorsque que l'on fait tout le tour.

Plus généralement on appelle forme différentielle *fermée* tout élément du noyau de d et forme différentielle *exacte* tout élément de son image. Comme $d \circ d = 0$, toute forme exacte est fermée. On montrera que la réciproque est toujours localement vraie et on définira le k -ième espace de cohomologie de de Rham de M comme l'obstruction à une réciproque globale :

$$H^k(M) = \{k\text{-formes fermées}\} / \{k\text{-formes exactes}\}.$$

C'est le début¹ de la *topologie algébrique* : l'étude des foncteurs entre des catégories d'espaces et des catégories algébriques. Ici à chaque variété on associe une collection d'espaces vectoriels et toute application entre variétés induit des applications linéaires

1. Le début dans les études proposées à l'X, on peut aussi commencer la topologie algébrique par d'autres portes

7. Cohomologie de de Rham

entre ces espaces vectoriels, de façon compatible avec la composition. En particulier deux variétés difféomorphes ont des espaces de de Rham isomorphes.

Dans l'exemple de la cascade (c'est-à-dire du plan troué), on voit que le cœur de l'affaire se joue déjà le long de n'importe quel cercle entourant le trou. C'est le signe d'une propriété très importante de la cohomologie de de Rham, partagée par de nombreux autres foncteurs de la topologie algébrique : elle est invariante par homotopie. C'est à la fois une force car cela donne l'espoir de la calculer et une faiblesse car cela l'empêche de distinguer des variétés trop semblables.

7.1. Rudiments d'algèbre homologique

Les outils d'algèbre linéaire intervenant en cohomologie de de Rham sont communs à de nombreuses autres constructions, en topologie algébrique et dans bien d'autres domaines. C'est pourquoi on les extrait de leur contexte topologique pour en faire une branche de l'algèbre appelée *algèbre homologique*. Bien sûr on indiquera au fur et à mesure la motivation provenant des formes différentielles. Dans ce chapitre l'algèbre homologique n'apparaît que sous la forme bénigne de quelques définitions et d'un lemme évident. Cette qualification devra être nuancée dans le chapitre suivant (sans parler de tout ce qui se trouve au-delà des objectifs de ce cours).

Dans cette section, R désigne un anneau commutatif unitaire fixé. Dans ce cours, on aura besoin uniquement du cas $R = \mathbb{R}$. On rappelle qu'un R -module est l'analogue d'un espace vectoriel pour lequel les scalaires sont des éléments de R . La terminologie espace vectoriel est réservée au cas où R est un corps.

On a construit dans le chapitre précédent la dérivée extérieure $d : \Omega^i M \rightarrow \Omega^{i+1} M$ pour tout i qui vérifie $d \circ d = 0$. Cela inspire la définition suivante.

Définition 7.1. *Un complexe de R -modules est une paire (C, d) où C est une suite $(C^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de R -modules équipée d'une suite d'opérateurs linéaires $d_i : C^i \rightarrow C^{i+1}$ vérifiant $d_i \circ d_{i-1} = 0$ pour tout i .*

La cohomologie d'un complexe (C, d) est la famille de R -modules

$$H^i(C, d) = \ker d_i / \operatorname{im} d_{i-1}.$$

On note immédiatement que la condition $d_i \circ d_{i-1} = 0$ est équivalente à $\operatorname{im} d_{i-1} \subset \ker d_i$, de sorte que la définition de la cohomologie a bien un sens.

On a démontré dans le chapitre précédent la naturalité de la dérivée extérieure : $f^* \circ d = d \circ f^*$ pour toute application f entre variétés. Cela inspire la définition suivante.

Un *morphisme de complexes* f entre deux complexes (C, d) et (C', d') est une famille d'applications linéaires $f_i : C^i \rightarrow (C')^i$ vérifiant $f_i \circ d_{i-1} = d'_{i-1} \circ f_{i-1}$ pour tout i , *i.e.*

le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{d_{i-2}} & C^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_i} & \dots \\
 & & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_i & & \\
 \dots & \xrightarrow{d'_{i-2}} & (C')^{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & (C')^i & \xrightarrow{d'_i} & \dots
 \end{array}$$

Cette condition implique immédiatement que f passe au quotient en famille d'applications de $H^i(C, d)$ dans $H^i(C', d')$.

Dans la section suivante, le théorème fondamental de la cohomologie de de Rham assurera que deux applications homotopes induisent les mêmes applications en cohomologie. La démonstration de ce résultat nécessitera la définition algébrique suivante et son lemme ci-dessous.

Une *homotopie entre morphismes de complexes* f et g est une famille d'applications linéaires $h_i : C^i \rightarrow (C')^{i-1}$ vérifiant $f_i = g_i + d'_{i-1} \circ h_i + h_{i+1} \circ d_i$. Les morphismes intervenant dans cette égalité apparaissent sur le diagramme suivant, qui n'est pas commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 C^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & C^i & \xrightarrow{d_i} & C^{i+1} \\
 & \searrow h_i & \downarrow f_i & \downarrow g_i & \swarrow h_{i+1} \\
 (C')^{i-1} & \xrightarrow{d'_{i-1}} & (C')^i & \xrightarrow{d'_i} & (C')^{i+1}
 \end{array}$$

On dit que f et g sont homotopes s'il existe une homotopie entre eux.

Lemme 7.2. *Deux morphismes de complexes homotopes induisent la même application en cohomologie.*

Démonstration. Pour alléger les notations, on omet les indices. Soit c un cocycle, c'est-à-dire un élément de C vérifiant $dc = 0$. On veut montrer que $f(c)$ et $g(c)$ sont cohomologues, c'est-à-dire qu'ils diffèrent d'un élément de l'image de d' . Or $f(c) = g(c) + d'(h(c)) + h(d(c)) = g(c) + d'(h(c))$. \square

7.2. Cohomologie de de Rham

On a vu que la dérivée extérieure envoie les p -formes sur les $(p+1)$ -formes et que son carré est nul. On peut donc poser la définition suivante.

Définition 7.3. *La cohomologie de de Rham $H^*(M)$ d'une variété M est la cohomologie du complexe $C^i = \Omega^i(M)$, muni de la dérivée extérieure.*

7. Cohomologie de de Rham

La formule de naturalité, $f^* \circ d = d \circ f^*$, montre que toute application $f: M \rightarrow N$ entre variétés induit un morphisme de complexes de de Rham $f^*: \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$, et donc un morphisme entre cohomologies de de Rham $f^*: H^*(N) \rightarrow H^*(M)$. Ces morphismes sont compatibles avec la composition des applications entre variétés, mais en renversant l'ordre de composition. Ainsi chaque H^i est un foncteur de \mathbf{Var}^{op} dans $\mathbf{Ev}_{\mathbb{R}}$. En particulier tout difféomorphisme induit un isomorphisme en cohomologie de de Rham.

Le théorème suivant est important à plus d'un titre. Tout d'abord il permet d'étendre la functorialité de la cohomologie de de Rham aux applications continues. Pour cela, comme d'habitude, on veut utiliser l'existence d'homotopies de lissage et une propriété d'invariance par homotopie. Ensuite, cette invariance par homotopie montre que les difféomorphismes sont très loin d'être les seules applications à induire un isomorphisme en cohomologie de de Rham. La définition suivante est fondamentale en topologie algébrique.

Définition 7.4. *Une application continue f entre deux espaces topologique X et Y est une équivalence d'homotopie s'il existe une application continue g de Y dans X telle que $g \circ f$ est homotope à Id_X et $f \circ g$ est homotope à Id_Y .*

Théorème 7.5. *Si $h_0, h_1: M \rightarrow N$ sont homotopes alors les morphismes qu'elles induisent entre les complexes de de Rham le sont aussi. Ainsi h_0 et h_1 induisent la même application en cohomologie. En particulier, toute équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en cohomologie.*

La démonstration de ce théorème passe par l'étude des formes différentielles sur un produit $W = M \times [0, 1]$. Toute p -forme ω sur W s'écrit de façon unique $\omega = \omega_t + dt \wedge \alpha_t$ où chaque ω_t est une p -forme sur M et chaque α_t est une $(p-1)$ -forme sur M . Cette écriture est un abus de notations traditionnel (et bien commode). On devrait plutôt écrire $\omega = \pi^* \omega_t + dt \wedge \pi^* \alpha_t$ avec $\omega_t = j_t^* \omega$ et $\alpha_t = j_t^*(\partial_t \lrcorner \omega)$, où π est la projection de W sur M et j_t l'inclusion envoyant m sur (m, t) .

Lemme 7.6. *Pour toute p -forme $\omega = \omega_t + dt \wedge \alpha_t$ sur $M \times [0, 1]$, on a :*

$$\omega_1 - \omega_0 = d \left(\int_0^1 \partial_t \lrcorner \omega \right) + \int_0^1 \partial_t \lrcorner d\omega$$

Démonstration. Notons d_M la dérivée extérieure de $\Omega^\bullet M$ et d_W celle de $\Omega^\bullet W$ afin d'éviter toute confusion. On vérifie, par exemple à l'aide de la formule en coordonnées de la proposition 6.14, que $d_W(\omega_t) = d_M \omega_t + dt \wedge \dot{\omega}_t$ où $\dot{\omega}_t$ désigne la dérivée de $t \mapsto \omega_t$ (qui va de $[0, 1]$ dans l'espace vectoriel $\Omega^\bullet M$ donc il n'y a aucune difficulté à définir cette dérivée comme application entre les mêmes espaces ni à l'intégrer pour obtenir la variation $\omega_1 - \omega_0$). À l'aide de cette formule appliquée aux familles ω_t et α_t et à l'aide de la formule de Leibniz graduée, on obtient

$$\begin{aligned} d_W \omega &= d_M \omega_t + dt \wedge \dot{\omega}_t + d dt \wedge \alpha_t - dt \wedge (d_M \alpha_t + dt \wedge \dot{\alpha}_t) \\ &= d_M \omega_t + dt \wedge (\dot{\omega}_t - d_M \alpha_t). \end{aligned}$$

En prenant le produit intérieur avec ∂_t , les termes provenant de M disparaissent tandis que $\partial_t \lrcorner dt = 1$ donc la formule précédente devient $\partial_t \lrcorner d_W \omega = \dot{\omega}_t - d_M \alpha_t$. Or $\alpha_t = \partial_t \lrcorner \omega$ donc on obtient $\partial_t \lrcorner d_W \omega = \dot{\omega}_t - d_M(\partial_t \lrcorner \omega)$. En intégrant cette formule il vient $\omega_1 - \omega_0 = \int_0^1 (\partial_t \lrcorner d_W \omega) + \int_0^1 d_M(\partial_t \lrcorner \omega)$. De plus la dérivée d_M commute à l'intégration par rapport à t car toutes les fonctions intégrées sont lisses. On obtient alors la formule annoncée. Il n'y a pas de danger à remplacer d_M par d dans cette formule finale car $\int_0^1 \partial_t \lrcorner \omega$ ne dépend pas de t et s'annule sur les vecteurs tangents au facteur $[0, 1]$. \square

Démonstration du théorème 7.5. Soit $h: M \times [0, 1] \rightarrow N$ une homotopie entre h_0 et h_1 . Le théorème d'approximation (théorème 3.5) permet de supposer que h est lisse (sans changer h_0 ni h_1). Pour toute forme différentielle α sur N , on applique alors le lemme d'homotopie énoncé ci-dessus à $\omega = h^* \alpha$ pour laquelle $\omega_0 = h_0^* \alpha$ et $\omega_1 = h_1^* \alpha$:

$$h_1^* \alpha - h_0^* \alpha = d \left(\int_0^1 \partial_t \lrcorner h^* \alpha \right) + \int_0^1 \partial_t \lrcorner h^* d\alpha.$$

On obtient ainsi un opérateur $H: \Omega^\bullet N \rightarrow \Omega^\bullet M$ défini par :

$$H: \alpha \mapsto \int_0^1 \partial_t \lrcorner (h^* \alpha)$$

qui envoie les k -formes sur les $(k-1)$ -formes (on dit que H est de degré -1) et vérifie $h_1^* - h_0^* = d \circ H + H \circ d$, c'est-à-dire que H est une homotopie entre les morphismes de complexes h_0^* et h_1^* . On conclut donc par le lemme 7.2. \square

Définition 7.7. Soit X un espace topologique, A une partie de X et ι l'inclusion de A dans X . Une rétraction de X sur A est une application continue $r: X \rightarrow A$ qui « vaut l'identité sur A ». Plus précisément, elle vérifie $r \circ \iota = \text{Id}_A$. Une rétraction par déformation est une rétraction r « homotope à l'identité de X relativement à A ». Plus précisément, $\iota \circ r: X \rightarrow X$ est homotope à l'identité parmi les applications f vérifiant $f \circ \iota = \iota$. Un espace topologique est contractile s'il se rétracte par déformation sur un point.

Il faut prendre garde à l'existence de variations de terminologie concernant les rétractions par déformation. Certains auteurs ne demandent pas que l'homotopie soit relative à A (condition « parmi les applications... ») et appellent rétractions par déformation forte nos rétractions par déformation. La définition faible suffit pour assurer la première partie du lemme ci-dessous mais pas la seconde. Dans ce cours ces subtilités n'interviendront jamais car les rétractions par déformation rencontrées seront évidemment fortes. De plus la terminologie adoptée ici est compatible avec l'excellent livre de topologie algébrique d'Allen Hatcher, ce qui clot le débat.

Corollaire 7.8. Soit M une variété et A une sous-variété de M . On note ι l'inclusion de A dans M . S'il existe une rétraction par déformation $r: M \rightarrow A$ alors r et ι induisent en cohomologie des isomorphismes inverses l'un de l'autre. De plus toute forme fermée α sur M dont la restriction à A est nulle admet une primitive dont la restriction à A est nulle.

7. Cohomologie de de Rham

Démonstration. Puisque $r \circ \iota = \text{Id}_A$, on a $\iota^* \circ r^* = \text{Id}_{H^*(A)}$. Le théorème d'invariance par homotopie (théorème 7.5) assure que $(\iota \circ r)^* = \text{Id}_M^*$, ce qu'on réécrit $r^* \circ \iota^* = \text{Id}_{H^*(M)}$. On a donc démontré la première partie, sans rien demander de spécifique à l'homotopie entre $\iota \circ r$ et Id_M .

Pour la deuxième partie il faut reprendre la démonstration du théorème à l'aide du lemme d'homotopie. Soit $h: M \times [0, 1] \rightarrow M$ une homotopie entre $h_0 = \iota \circ r$ et $h_1 = \text{Id}_M$. Soit α une forme fermée sur M . Comme dans la démonstration du théorème, on applique le lemme 7.6 à $h^*\alpha$. On obtient :

$$\alpha - r^* \iota^* \alpha = d \left(\int_M \partial_t \lrcorner h^* \alpha \right).$$

Si $\iota^* \alpha = 0$ on obtient bien une primitive de α . De plus, en tout point (x, t) de $A \times [0, 1]$,

$$(\partial_t \lrcorner h^* \alpha)_{(x,t)}(v) = \alpha_{h(x,t)}(T_{(x,t)} h(\partial_t), T_{(x,t)} h(v)).$$

Or $h(x, t) = x$ pour tout (x, t) de $A \times [0, 1]$ donc $T_{(x,t)} h(\partial_t) = 0$. Ainsi on intègre l'élément nul de $\Lambda^k T_x^* M$ et le résultat est nul. A fortiori sa restriction à $(T_x A)^k$ est nulle. \square

L'exemple le plus important d'espace contractile est \mathbb{R}^n , qui se rétracte sur l'origine par $r: x \mapsto 0$. Comme homotopie entre $\iota \circ r$ et l'identité on peut choisir $r_t(x) = tx$. Plus généralement, un sous-ensemble étoilé d'un espace affine est contractile. Il est aisé de calculer la cohomologie de de Rham d'un point : elle est isomorphe à \mathbb{R} en degré zéro car le point est connexe et triviale en tout degré strictement positif car le point n'a pas de forme différentielle de degré strictement positif. On obtient donc le corollaire suivant.

Corollaire 7.9. *La cohomologie de de Rham d'un espace affine est nulle sauf en degré zéro où elle est isomorphe à \mathbb{R} .*

Puisque tout point d'une variété possède un voisinage difféomorphe à \mathbb{R}^n , on obtient le résultat promis dans l'introduction de ce chapitre : toute forme fermée (de degré au moins un) est localement exacte. On remarque que la démonstration de ce fait est constructive. En effet, la forme explicite de la rétraction par déformation de \mathbb{R}^n sur un point, le lemme d'homotopie et la démonstration du corollaire donnent une primitive explicite à toute forme fermée sur \mathbb{R}^n .

On conclut cette section en remarquant que la cohomologie de de Rham est en fait une algèbre commutative graduée et pas seulement un espace vectoriel gradué. Un espace vectoriel gradué est simplement un espace vectoriel décomposé en somme directe indexée par des entiers (ici les degrés). Dans le contexte d'une algèbre, ce mot fait en plus référence à la commutativité au sens gradué : $\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha$.

Proposition 7.10. *Le produit extérieur des formes différentielles induit un produit en cohomologie de de Rham qui en fait une algèbre commutative graduée.*

Démonstration. La formule $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$ de la proposition 6.19 montre qu'un produit extérieur de formes fermées est fermé. Elle montre aussi que le produit extérieur d'une forme fermée et d'une forme exacte est exact car, si $d\beta = 0$, la formule devient $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta$ donc le produit de β avec la forme exacte $d\alpha$ est exact. \square

7.3. Cohomologie à support compact

La rétraction par déformation de \mathbb{R}^n considérée dans la section précédente est tout à fait légitime mais géométriquement assez violente. Dans l'homotopie $r_t(x) = tx$, l'application r_t est bijective pour tout $t > 0$ et devient soudainement constante pour $t = 0$. Cet accident explique pourquoi la cohomologie de de Rham ne voit rien de la topologie de \mathbb{R}^n . Par exemple cela empêche d'espérer démontrer quoi que ce soit de fin concernant cette cohomologie par récurrence sur le nombre de cartes d'une variété. Pour cela il est commode de disposer d'une variante de la théorie qui ne change rien au cas des variétés compactes mais ne soit pas invariante par des déformations aussi brutales.

On rappelle que $\Omega_c^\bullet M$ désigne la sous-algèbre de $\Omega^\bullet M$ constituée des formes différentielles à support compact, c'est-à-dire nulles en dehors d'un compact. Cette sous-algèbre est invariante par dérivée extérieure donc on récupère un nouveau complexe et sa cohomologie notée $H_c^*(M)$. Dans cette théorie, on ne considère que les formes fermées à support compact et on ne quotiente que par celle ayant une primitive elle aussi à support compact (ce dernier point est crucial).

Tirer en arrière une forme différentielle à support compact par application entre variétés ne donne pas nécessairement une forme différentielle à support compact (penser au cas d'une application constante entre variétés non compactes) mais c'est le cas si l'application est supposée propre (au sens topologique : l'image inverse de tout compact est compact). De telles applications induisent donc des morphismes en cohomologie de de Rham à support compact. De même, le théorème 7.5 reste valable à condition de supposer que l'homotopie $h : M \times [0, 1] \rightarrow N$ est propre. En effet, sous cette condition, l'opérateur H construit dans la démonstration envoie bien les formes à support compact dans les formes à support compact. Par contre sans hypothèse de propriété le théorème devient faux. En particulier on montrera dans le chapitre 8 que la cohomologie de de Rham à support compact de \mathbb{R}^n est isomorphe à \mathbb{R} en degré n et triviale pour les autres degrés.

La question de la propriété se pose en particulier pour les inclusions. En général l'inclusion d'une sous-variété A dans une variété M n'induit pas de flèche de restriction $H_c^*(M) \rightarrow H_c^*(A)$. Par contre, si A est un ouvert de M alors on peut étendre par zéro les formes différentielles à support compact dans A . Si on note $j : A \hookrightarrow M$ l'inclusion de A , on note $j_\#$ l'inclusion induite de $\Omega_c^\bullet(A) \hookrightarrow \Omega_c^\bullet(M)$. Cette inclusion induit une application linéaire, encore notée $j_\#$, de $H_c^*(A)$ dans $H_c^*(M)$ (qui n'est pas nécessairement injective).

7.4. Exercices

Exercice 7.1. Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe orienté fini. Cela signifie que S est un ensemble fini vu comme ensemble des sommets de Γ et A est une partie de $S \times S$, un élément (s, s') dans A étant vu comme une arête reliant s à s' . On note $C^0 = \{\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}\}$ et $C^1 = \{\psi : A \rightarrow \mathbb{R}\}$. Soit $d : C^0 \rightarrow C^1$ défini par $d\varphi(s, s') = \varphi(s') - \varphi(s)$. On pose $C^k = \{0\}$ pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. Décrire la cohomologie du complexe (C^\bullet, d) . Énoncer la

7. Cohomologie de de Rham

loi des mailles de l'électrocinétique comme une contrainte cohomologique.

Exercice 7.2. Calculer la cohomologie de de Rham du cercle \mathbb{S}^1 . En déduire la cohomologie de de Rham du plan épointé $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Exercice 7.3. Le but de cet exercice est de calculer $H^1(\mathbb{T}^n)$. Soit $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ la projection canonique. Soit α une 1-forme fermée sur \mathbb{T}^n . Montrer que $p^*\alpha$ est une forme exacte sur \mathbb{R}^n . Soit f une primitive quelconque de $p^*\alpha$. Montrer que α est exacte si et seulement si f est 2π -périodique par rapport à toutes les variables. En utilisant le développement en série de Fourier des composantes de $p^*\alpha$ dans la base (dx_1, \dots, dx_n) , montrer que α est exacte si et seulement si aucune des composantes de $p^*\alpha$ n'a de terme constant dans son développement de Fourier. Conclure. Discuter si on peut espérer utiliser cette stratégie pour calculer $H^k(\mathbb{T}^n)$ avec $k > 1$.

Exercice 7.4. Soit $\iota : A \rightarrow M$ l'inclusion d'une sous-variété A dans une variété M . Est-ce que ι^* est nécessairement injectif de $\Omega^\bullet M$ dans $\Omega^\bullet A$? Et de $H^*(M)$ dans $H^*(A)$? Est-ce que ι^* est surjectif ? Que dire de p^* si p est surjective ?

Exercice 7.5. Montrer que toute matrice dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ (le groupe des matrices 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1) induit un difféomorphisme de \mathbb{T}^2 . En utilisant le calcul de $H^1(\mathbb{T}^2)$ dans l'exercice 7.3, montrer que ce difféomorphisme n'est homotope à l'identité que si la matrice est I_2 .

Exercice 7.6. On dit qu'un espace topologie X est simplement connexe s'il est connexe et si toute application continue de \mathbb{S}^1 dans X s'étend en application continue de \mathbb{D}^2 dans X . Si X est une variété, le théorème de lissage du chapitre 3 montre qu'on obtient la même notion en remplaçant application continue par application (sous-entendue lisse) partout.

Montrer que si M est simplement connexe alors $H^1(M) = 0$. On pourra chercher à construire une primitive de toute forme fermée en l'intégrant le long de chemins.

Exercice 7.7. Soit M une variété et $S \subset M$ une sous-variété compacte, sans bord, orientée, de dimension k . Montrer que l'intégration des k -formes différentielles sur S induit une forme linéaire sur $H^k(M)$. En déduire que $H^k(\mathbb{T}^n)$ est de dimension au moins C_n^k .

Exercice 7.8. Soit M une variété. Le but de cet exercice est d'expliquer une façon de calculer $H^1(M)$ à partir de la combinatoire d'un bon recouvrement de M . On suppose que M est recouverte par des ouverts U_i contractiles, $i \in J$ et tels que les intersections $U_i \cap U_j$ et $U_i \cap U_j \cap U_k$ soient toutes vides ou contractiles. Pour $l \in \{0, 1, 2\}$, on note A_l l'ensemble des $(l+1)$ -uplets ordonnés d'indices distincts dans J . On note C^l l'ensemble des fonctions de A_l dans \mathbb{R} . On définit $d : C^l \rightarrow C^{l+1}$ par

$$df(I) = \sum_j (-1)^j f(I'_j)$$

où I'_j est le $(l+1)$ -uplet obtenu à partir de I en omettant le j -ième indice. Montrer que (C^\bullet, d) est un complexe. À toute 1-forme fermée α sur M on associe $f \in C^1$ qui envoie

(i, j) sur la différence entre une primitive de α sur U_j et sur U_i . Montrer qu'on obtient ainsi une application bien définie qui induit un isomorphisme en cohomologie.

En déduire $H^1(\Sigma)$ où Σ est la surface d'une bouée à deux places.

8. Suites exactes longues en cohomologie

Le chapitre précédent a introduit les espaces cohomologie de de Rham et calculé quelques exemples très simples, soit en se ramenant à la cohomologie d'un point en utilisant l'invariance par homotopie soit en ne dépassant pas le stade du H^1 . Les succès rencontrés dans le cas du H^1 tiennent en bonne partie au fait que deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une 0-forme fermée, c'est à dire d'une constante (en supposant la variété connexe). Or le monde des formes fermées de degré non nul est bien plus vaste ; celui des 1-formes fermées contient toutes les différentielles de fonctions par exemple. On peut donc légitimement s'inquiéter pour la calculabilité des H^k non nuls avec $k > 1$. Ce chapitre présente un outil majeur pour débloquer la situation : le passage des suites exactes courtes de complexes aux suites exactes longues en cohomologie. Comme il s'agit d'un gadget algébrique un peu lourd à mettre en place, il est utile de faire d'abord une tentative plus artisanale.

On cherche à calculer la cohomologie de de Rham de la sphère \mathbb{S}^2 . Puisque \mathbb{S}^2 est simplement connexe, $H^0(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{R}$ et $H^1(\mathbb{S}^2) = 0$ (cf. les exercices du chapitre précédent). Il reste donc à calculer $H^2(\mathbb{S}^2)$. L'idée cruciale est de décomposer \mathbb{S}^2 en deux ouverts U_0 et U_1 diffeomorphes à des plans et s'intersectant le long d'un cylindre ouvert U_{01} . On peut penser que U_0 est le complémentaire du pôle Nord et U_1 celui du pôle Sud. On a le diagramme commutatif d'inclusions suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & U_{01} & \\
 i_0 \swarrow & \downarrow j & \searrow i_1 \\
 U_0 & & U_1 \\
 j_0 \searrow & \downarrow j & \swarrow j_1 \\
 & \mathbb{S}^2 &
 \end{array}$$

Les cohomologies de U_0 et U_1 sont connues. Comme U_{01} se rétracte par déformation sur l'équateur, sa cohomologie est aussi connue. L'espoir est de reconstruire $H^2(\mathbb{S}^2)$ à partir de ces informations. Soit donc ω une 2-forme sur \mathbb{S}^2 (automatiquement fermée car \mathbb{S}^2 est de dimension deux). Comme $H^2(U_k) \simeq 0$ pour $k = 0$ ou $k = 1$, il existe des 1-formes α_k sur U_k telles que $j_k^* \omega = d\alpha_k$. Une observation essentielle est que $\alpha_1 - \alpha_0$ est fermée sur l'intersection U_{01} car α_1 et α_0 y ont même dérivée. Plus précisément on peut écrire :

$$d(i_1^* \alpha_1 - i_0^* \alpha_0) = i_1^* d\alpha_1 - i_0^* d\alpha_0 = i_1^* j_1^* \omega - i_0^* j_0^* \omega = j^* \omega - j^* \omega = 0.$$

De plus, comme $H^1(U_k) = 0$, le choix de α_k n'est arbitraire que modulo l'addition d'une différentielle de fonction df_k . Ainsi la classe de cohomologie de $i_1^* \alpha_1 - i_0^* \alpha_0$ dans $H^1(U_{01})$

8. Suites exactes longues en cohomologie

ne dépend que de ω . Mieux, si on remplace ω par une forme cohomologue $\omega + d\eta$, on peut remplacer chaque α_k par $\alpha_k + i_k^* \eta$ sans changer $i_1^* \alpha_1 - i_0^* \alpha_0$. On a donc construit une application de $H^2(\mathbb{S}^2)$ dans $H^1(U_{01})$. On peut vérifier qu'elle est linéaire.

Montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme (on aura donc $H^2(\mathbb{S}^2) \simeq \mathbb{R}$). Soit (ρ_0, ρ_1) une partition de l'unité subordonnée à (U_0, U_1) . On part d'une 1-forme fermée α sur U_{01} . La 1-forme $\rho_0 \alpha$ s'étend à U_0 par zéro, elle est donc de la forme $\rho_0 \alpha = i_1^* \alpha_1$. De même $-\rho_1 \alpha = i_0^* \alpha_0$. Le signe est là pour avoir $\alpha = i_1^* \alpha_1 - i_0^* \alpha_0$ en utilisant $\rho_0 + \rho_1 = 1$. Par construction

$$0 = d\alpha = d(i_1^* \alpha_1 - i_0^* \alpha_0) = i_1^* d\alpha_1 - i_0^* d\alpha_0$$

donc $d\alpha_0$ et $d\alpha_1$ se recollent en 2-forme globale ω sur \mathbb{S}^2 . Attention, cela ne signifie pas α_0 et α_1 se recollent en 1-forme globale, sinon ω serait exacte, ce que Stokes interdit si ω est une forme volume par exemple. Si on remplace α par une 1-forme cohomologue $\alpha + df$ alors α_0 devient $\alpha_0 - \rho_1 df$ (où $\rho_1 df$ désigne l'extension par zéro de $\rho_1 df$ à U_0) tandis que α_1 devient $\alpha_1 + \rho_0 df$. Ainsi ω devient $\omega + d\beta$ où, par exemple, β est une 1-forme qui vaut $\rho_0 df$ sur U_1 et $(1 - \rho_1)df$ sur U_0 , les deux se recollant bien sur U_{01} . On a donc bien défini une application de $H^1(\mathbb{S}^1)$ dans $H^2(\mathbb{S}^2)$. On vérifie qu'il s'agit de l'inverse de l'application précédente.

On tire les leçons suivantes de cet exemple. La stratégie fonctionne. Il y a beaucoup de vérifications à faire. Celles-ci ne dépendent pas vraiment de la situation précise mais seulement des groupes de cohomologie déjà connus et de l'existence de partitions de l'unité. Clairement il serait très lourd et répétitif de devoir refaire cette gymnastique à chaque nouvel exemple de variété décrite comme réunion de variétés plus simples. S'il y a plus de deux ouverts dans la décomposition ou, de façon équivalente, si on essaie d'itérer la décomposition en deux ouverts au prix d'un accroissement progressif de la complexité des ouverts, la méthode risque de devenir inextricable.

Toutes ces leçons poussent à développer l'algèbre homologique de la section suivante. On en déduira ensuite un énoncé général reliant la cohomologie de $U, V, U \cap V$ et $U \cup V$: la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, qui ne donnera directement un isomorphisme entre $H^k(U \cap V)$ et $H^{k+1}(U \cup V)$ que dans le cas favorable où U et V n'ont pas de cohomologie en degré k et $k + 1$. Mieux, le même théorème d'algèbre donnera une version à support compact et un énoncé en tout points analogue reliant la cohomologie d'une variété, d'une sous-variété et du complémentaire de cette sous-variété.

8.1. Suites exactes courtes et longues

Cette section est la suite de la section 7.1. On y présente le théorème fondamental de l'algèbre homologique : une suite exacte courte de complexes induit une suite exacte longue en cohomologie. Comme dans section 7.1, on note R un anneau commutatif unitaire mais seul le cas $R = \mathbb{R}$ sera utile dans ce cours. On rappelle qu'un R -module est l'analogue d'un espace vectoriel lorsqu'on remplace le corps des scalaires par un anneau.

Pour décrire les relations annoncées dans l'introduction du chapitre, même si les ouverts de la décomposition sont compliqués, il faut introduire la notion de suite exacte.

8.1. Suites exactes courtes et longues

Une suite de R -modules est une famille A^i de R modules indexée par un intervalle d'entiers naturels et munie d'une suite de morphismes $f_i: A^i \rightarrow A^{i+1}$. On dit qu'une telle suite est exacte en A^i si $\ker f_i = \text{im } f_{i-1}$. On dit qu'elle est *exacte* si elle est exacte en A^i pour tout i . En particulier toute suite exacte de R -modules est un complexe de R -modules et la cohomologie d'un complexe de R -modules mesure son défaut d'exactitude.

De façon plus élémentaire, on peut exprimer l'injectivité ou la surjectivité d'un morphisme de modules en termes de suites exactes. Un morphisme $u: A \rightarrow B$ est surjectif si et seulement si la suite $A \xrightarrow{u} B \rightarrow 0$ est exacte. Il est injectif si et seulement si $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B$ est exacte. Il est donc bijectif si et seulement si $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \rightarrow 0$ est exacte. On appelle *suite exacte courte* une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

Une telle suite présente C comme quotient de B par A (plus exactement i injecte A dans B et p induit un isomorphisme de $B/i(A)$ vers C).

Une *suite exacte de complexes* est une famille de complexes C_i^\bullet de R -modules indexée par un intervalle d'entiers et une famille de morphismes de complexes $f_i^\bullet: C_i^\bullet \rightarrow C_{i+1}^\bullet$ telle que, pour tout j fixé, $((C_i^j)_i, (f_i^j)_i)$ est une suite exacte de R -modules. On peut dire que l'énoncé suivant est le théorème fondamental de l'algèbre homologique, il affirme qu'une suite exacte courte de complexes engendre une *suite exacte longue* en cohomologie.

Théorème 8.1. *Toute suite exacte courte de complexes $0 \rightarrow C^\bullet \rightarrow D^\bullet \rightarrow E^\bullet \rightarrow 0$ engendre une suite exacte longue*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(C) & \longrightarrow & H^0(D) & \longrightarrow & H^0(E) \\ & & & & & & \searrow \delta^0 \\ & & & & & & \longrightarrow H^1(C) & \longrightarrow & H^1(D) & \longrightarrow & H^1(E) \\ & & & & & & \searrow \delta^1 \\ & & & & & & \longrightarrow H^2(C) & \longrightarrow & H^2(D) & \longrightarrow & H^2(E) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

où les flèches horizontales sont induites par les morphismes de complexes de la suite exacte courte. De plus cette suite exacte dépend fonctoriellement de la suite exacte courte de départ : pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_1^\bullet & \longrightarrow & D_1^\bullet & \longrightarrow & E_1^\bullet & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_2^\bullet & \longrightarrow & D_2^\bullet & \longrightarrow & E_2^\bullet & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

de suites exactes courtes, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H^i(E_1) & \xrightarrow{\delta_1^i} & H^{i+1}(C_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(E_2) & \xrightarrow{\delta_2^i} & H^{i+1}(C_2) \end{array}$$

8. Suites exactes longues en cohomologie

commutent.

Les morphismes sinueux du théorème précédent sont appelés *morphismes connectant*. Ils sont construits à l'aide du lemme 8.3, connu sous le nom de *lemme du serpent* à cause de la forme de la flèche δ dans la conclusion.

On commence par une observation plus élémentaire dont la démonstration est laissée en exercice.

Lemme 8.2. Soit A, B, C et D des R -modules. On suppose que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ d' \downarrow & & \downarrow d \\ C & \xrightarrow{f'} & D \end{array}$$

Alors la restriction de f à $\ker d'$ arrive dans $\ker d$ et l'application de $\operatorname{coker} d'$ dans $\operatorname{coker} d$ qui envoie $[c]$ sur $[f'(c)]$ est un morphisme de R -modules bien défini. Ces deux applications sont l'unique façon de compléter le diagramme en diagramme commutatif comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \ker d & \longrightarrow & \ker d' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \\ d' \downarrow & & \downarrow d \\ C & \xrightarrow{f'} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{coker} d' & \longrightarrow & \operatorname{coker} d \end{array}$$

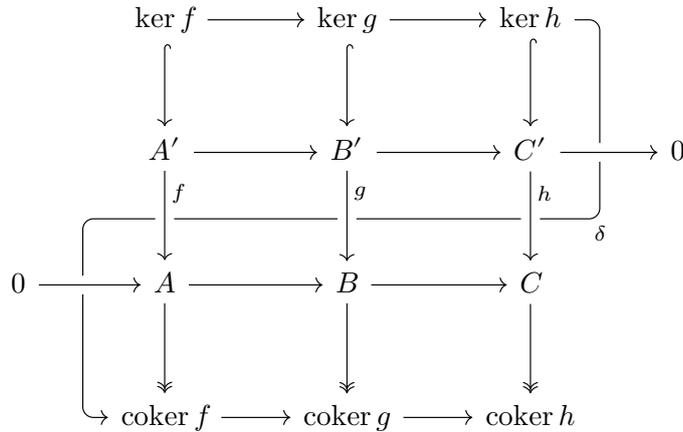
Lemme 8.3. On suppose que le diagramme suivant commute et que ses lignes sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \xrightarrow{\varphi} & B' & \xrightarrow{p} & C' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\psi} & C \end{array}$$

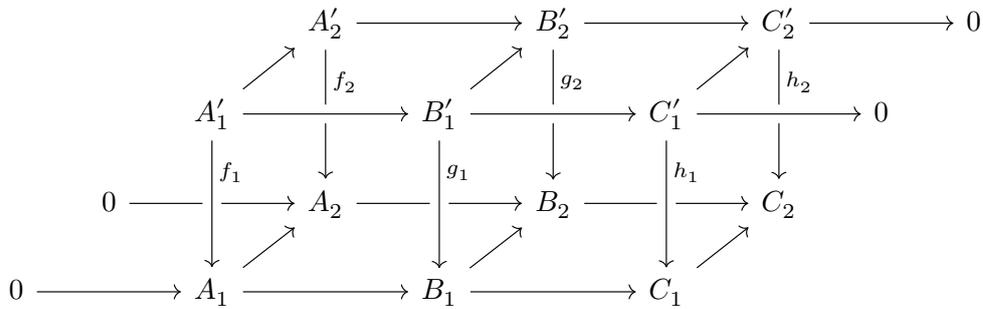
Il existe une suite exacte

$$\ker f \longrightarrow \ker g \longrightarrow \ker h \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} f \longrightarrow \operatorname{coker} g \longrightarrow \operatorname{coker} h$$

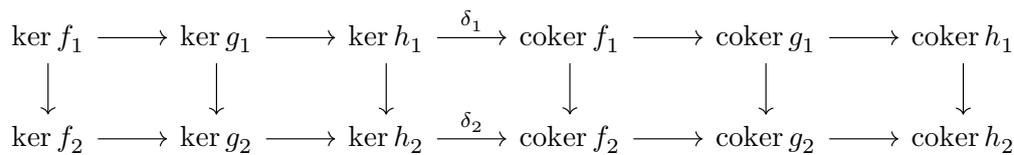
qui rend commutatif le diagramme suivant :



De plus, si φ est injective alors la flèche $\ker f \rightarrow \ker g$ obtenue l'est aussi. Si ψ est surjective alors $\text{coker } g \rightarrow \text{coker } h$ l'est aussi. Enfin la suite exacte construite est naturelle : si le diagramme



commute et que ses lignes sont exactes alors les suites exactes du serpent construites à partir du diagramme du fond et de devant sont liées par le diagramme commutatif suivant :



Le morphisme δ est appelé connectant. Il envoie c' sur $[i^{-1}(g(p^{-1}(c')))]$ où $p^{-1}(c')$ désigne n'importe quelle préimage b' de c' et de même $i^{-1}(\dots)$ désigne n'importe quelle préimage de $g(b')$. Les faits que ces préimages existent et que le résultat ne dépende pas de ces deux choix arbitraires font partie de l'énoncé.

Démonstration. La démonstration complète de ce lemme est extrêmement fastidieuse. On se contente d'en donner des extraits choisis pour illustrer la technique dite de « chasse dans le diagramme ».

8. Suites exactes longues en cohomologie

Le lemme 8.2 fournit, de façon unique, les morphismes entre noyaux et les morphismes entre conoyaux du diagramme visé. Montrons que $\ker f \rightarrow \ker g \rightarrow \ker h$ est une suite exacte. La flèche de $\ker g$ dans $\ker h$ n'est autre que la restriction de p . Soit b' un élément de $\ker g$. Si $b' = \varphi(a')$ pour a' dans $\ker f$ alors $p(b') = 0$ par exactitude de $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$. Réciproquement si $p(b') = 0$ alors la même exactitude implique $b' = \varphi(a')$ pour un certain a' dans A' . Il suffit de montrer que ce a' est automatiquement dans $\ker f$. Cela découle de la commutativité du carré à gauche du diagramme de départ : $g \circ \varphi = i \circ f$, qui implique $i \circ f(a) = 0$, et de l'injectivité de i .

Montrons maintenant que δ est bien défini. Soit c' un élément de $\ker h$. Puisque p est surjective, il existe b' un élément de $p^{-1}(c')$. Par commutativité du carré à droite du diagramme de départ, $\psi(b') = 0$ et par exactitude de la ligne du bas en B , il existe a dans $i^{-1}(p(b'))$. De plus ce a est unique (b' étant fixé) car i est injective. Il reste à voir que si b'_1 et b'_2 vérifient tous deux $p(b'_i) = c$ alors $[i^{-1}(p(b'_1))] = [i^{-1}(p(b'_2))]$ dans $\text{coker } f$. Par hypothèse $b'_1 - b'_2$ est dans $\ker p$. L'exactitude de la ligne du haut fournit a' tel que $b'_1 - b'_2 = \varphi(a')$. La commutativité du carré de gauche assure que $g(\varphi(a')) = i(f(a'))$ et on obtient $i^{-1}(p(b'_1)) - i^{-1}(p(b'_2)) = f(a')$ qui s'annule dans le quotient $\text{coker } f$. \square

Démonstration du théorème 8.1. Par hypothèse, on a, pour tout k , le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^k & \longrightarrow & D^k & \longrightarrow & E^k & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{k+1} & \longrightarrow & D^{k+1} & \longrightarrow & E^{k+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On fixe n et on applique le lemme du serpent au diagramme ci-dessus pour $k = n + 1$ en utilisant uniquement l'information sur les applications obtenues entre les noyaux, mais sans oublier que le φ du lemme est ici injectif. On obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow Z^{n+1}C \longrightarrow Z^{n+1}D \longrightarrow Z^{n+1}E$$

où $Z^{n+1}C = \ker(d: C^{n+1} \rightarrow C^{n+2})$ et de même pour D et E . De même on applique le lemme au diagramme avec $k = n - 1$ en ne se préoccupant que des conoyaux pour obtenir la suite exacte :

$$C^n / \text{im } d \longrightarrow D^n / \text{im } d \longrightarrow E^n / \text{im } d \longrightarrow 0.$$

Comme $d \circ d = 0$ pour chacun des trois complexes, on a des applications induites $C^n / \text{im } d \rightarrow Z^{n+1}C$ et de même pour D et E . Ainsi le diagramme suivant commute et ses lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} C^n / \text{im } d & \longrightarrow & D^n / \text{im } d & \longrightarrow & E^n / \text{im } d & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ 0 & \longrightarrow & Z^{n+1}C & \longrightarrow & Z^{n+1}D & \longrightarrow & Z^{n+1}E \end{array}$$

8. Suites exactes longues en cohomologie

sur $U \cap V$ est différence d'une forme α qui s'étend à U et d'une forme β qui s'étend à V . Soit (ρ_U, ρ_V) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de $U \cup V$ par U et V . On pose $\alpha = \rho_V \gamma$, qui peut être étendue par zéro sur $U \setminus (U \cap V)$ et $\beta = -\rho_U \gamma$, qui peut être étendue par zéro sur $V \setminus (U \cap V)$. \square

On peut maintenant reprendre l'exemple de l'introduction du chapitre avec une toute autre mesure : en toute dimension et tout degré. On peut recouvrir \mathbb{S}^n par deux ouverts U et V difféomorphes à \mathbb{R}^n et dont l'intersection se rétracte par déformation sur une sphère \mathbb{S}^{n-1} . Le calcul de la cohomologie de \mathbb{R}^n dans le chapitre précédent, l'invariance de la cohomologie de de Rham par équivalence d'homotopie et la suite de Mayer-Vietoris permettent alors de calculer la cohomologie de \mathbb{S}^n .

Corollaire 8.5. *La cohomologie de de Rham de la sphère \mathbb{S}^n , $n \geq 1$, est nulle sauf en degré 0 et n où elle est de dimension un. Toute forme différentielle de degré n sur \mathbb{S}^n et d'intégrale non nulle est fermée et sa classe de cohomologie engendre $H^n(\mathbb{S}^n)$.*

Démonstration. On sait déjà que la dimension de H^0 compte le nombre de composantes connexes. Donc $H^0(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{R}$ pour $n \geq 1$ et $H^0(\mathbb{S}^0) \simeq \mathbb{R}^2$ (ce dernier cas n'apparaît pas dans l'énoncé mais sera utile dans la récurrence sur la dimension).

Par définition, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$. On pose $U = \{x \in \mathbb{S}^n; x_n > -1/2\}$ et $V = \{x \in \mathbb{S}^n; x_n < 1/2\}$. L'intersection $U \cap V$ se rétracte par déformation sur $S = \mathbb{S}^n \cap \{x_n = 0\}$ via

$$r_t(x) = \frac{(x_1, \dots, x_{n-1}, tx_n)}{\|(x_1, \dots, x_{n-1}, tx_n)\|}$$

qui est bien défini car $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ n'est jamais nul pour x dans $U \cap V$. Ainsi tous les $H^k(U) \oplus H^k(V)$ de la suite exacte de Mayer-Vietoris sont nuls sauf pour $k = 0$. Donc

$$\forall k \geq 1, \quad H^k(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H^{k+1}(\mathbb{S}^n).$$

Si $n > 1$, $i_U^* - i_V^*$ est surjectif de $H^0(U) \oplus H^0(V)$ dans $H^0(U \cap V)$ (toute fonction localement constante sur $U \cap V$ est différence de fonctions localement constantes sur U et sur V) donc on obtient en plus $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$. Dans le cas $n = 1$, l'image de $i_U^* - i_V^*$ est de dimension un dans $H^0(U \cap V)$ qui est de dimension 2 (S est constitué de deux points dans ce cas). Ainsi $H^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$. De plus $H^k(\mathbb{S}^1)$ est nul pour $k > 1$, faute de combattants. On a donc la situation du diagramme suivant où chaque flèche diagonale est un isomorphisme $H^k(\mathbb{S}^{n-1}) \simeq H^{k+1}(\mathbb{S}^n)$ obtenu ci-dessus tandis que les flèches horizontales et verticales

8. Suites exactes longues en cohomologie

Théorème 8.7. *Soit M une variété compacte sans bord et $\Sigma \subset M$ une sous-variété compacte sans bord. On note i l'inclusion $\Sigma \hookrightarrow M$ et j l'inclusion $M \setminus \Sigma \hookrightarrow M$. On a une suite exacte longue :*

$$0 \rightarrow H_c^0(M \setminus \Sigma) \rightarrow H^0(M) \rightarrow H^0(\Sigma) \rightarrow H_c^1(M \setminus \Sigma) \rightarrow \dots$$

où les flèches de $H_c^k(M \setminus \Sigma) \rightarrow H^k(M)$ proviennent de $j_\#$ et les flèches de $H^k(M) \rightarrow H^k(\Sigma)$ proviennent de i^* .

Démonstration. On commence par montrer que toute forme différentielle sur Σ s'étend en forme différentielle sur M . Soit $\pi : U \rightarrow \Sigma$ un voisinage tubulaire de Σ fourni par le théorème 3.4 et $\rho : M \rightarrow [0, 1]$ une fonction plateau qui vaut 1 au voisinage de Σ et est à support dans U . On note ι l'inclusion de U dans M et on considère l'application d'extension

$$\varphi \left(\begin{array}{c} \Omega^\bullet(\Sigma) \rightarrow \Omega^\bullet(M) \\ \alpha \mapsto \iota_\#(\rho\pi^*\alpha) \end{array} \right).$$

Par construction φ est un inverse à droite de i^* , qui est donc surjectif. On note $\Omega^\bullet(M, \Sigma) = \ker i^*$ le sous-espace vectoriel des formes différentielles qui s'annulent en restriction à Σ . On a donc une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M, \Sigma) \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^\bullet(\Sigma) \longrightarrow 0$$

Le théorème 8.1 fournit une suite exacte longue qui est presque celle annoncée, sauf que la cohomologie de $\Omega^\bullet(M, \Sigma)$ intervient en lieu et place de celle de $\Omega_c^\bullet(M \setminus \Sigma)$. Il suffit donc de montrer que l'inclusion de $\Omega_c^\bullet(M \setminus \Sigma)$ dans $\Omega^\bullet(M, \Sigma)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

Montrons d'abord l'injectivité. Soit ω une forme fermée appartenant à $\Omega_c^\bullet(M \setminus \Sigma)$. On suppose que $[\omega]$ est nulle dans $H^*(\Omega^\bullet(M, \Sigma))$, c'est à dire qu'il existe η nulle en restriction à Σ et vérifiant $d\eta = \omega$. On veut montrer qu'on peut remplacer η par η' à support compact dans $M \setminus \Sigma$ (car alors $[\omega]$ est bien nulle dans $H_c^*(M \setminus \Sigma)$). Quitte à rétrécir le voisinage tubulaire U considéré ci-dessus, on peut supposer que U n'intersecte pas le support de ω . En particulier $d(\iota^*\eta) = \iota^*d\eta = 0$. Ainsi $\iota^*\eta$ est une forme fermée sur U . De plus sa restriction $i^*\iota^*\eta$ à Σ est nulle. L'application qui écrase chaque fibre de U sur sa base est une rétraction par déformation de U sur Σ . Donc la première partie du corollaire 7.8 assure qu'il existe $\gamma \in \Omega^\bullet(U)$ telle que $\iota^*\eta = d\gamma$. On pose $\eta' = \eta - d(\varphi(\gamma))$ où φ est l'opérateur d'extension défini précédemment. On a bien $d\eta' = d\eta = \omega$ et $\iota^*\eta' = 0$ donc η' est dans $\Omega_c^\bullet(M \setminus \Sigma)$.

Montrons maintenant la surjectivité. Soit ω une forme fermée appartenant à $\Omega^\bullet(M, \Sigma)$. On veut montrer qu'il existe une forme η dans $\Omega^\bullet(M, \Sigma)$ telle que $\omega + d\eta$ est dans $\Omega_c^\bullet(M \setminus \Sigma)$. Comme $\iota^*\omega$ est fermée et $i^*\omega = 0$, la deuxième partie du corollaire 7.8 fournit une forme γ dans $\Omega^\bullet(U, \Sigma)$ telle que $d\gamma = \iota^*\omega$. On pose $\eta = -d(\varphi(\gamma))$. \square

On donne maintenant un exemple d'application de cette suite exacte pour calculer la cohomologie à support compact de \mathbb{R}^n . On peut faire ce calcul de façon plus élémentaire

(mais sans doute pas plus éclairante) et plus calculatoire. Mais on insiste ici sur la magie des suites exactes longues. À partir de la cohomologie d'un point, on a calculé la cohomologie de \mathbb{R}^n en utilisant l'invariance par homotopie. En utilisant la suite de Mayer-Vietoris, on a en a déduit la cohomologie des sphères. On utilise maintenant la suite des paires pour déduire de la cohomologie de \mathbb{R}^n et \mathbb{S}^n la cohomologie à support compact de \mathbb{R}^n . Dans toute cette succession de calculs on ne calcule jamais une dérivée ou une primitive d'une forme différentielle.

Corollaire 8.8. *Pour tout $n \geq 1$, la cohomologie de de Rham à support compact de \mathbb{R}^n est isomorphe à \mathbb{R} en degré n et triviale pour les autres degrés.*

Démonstration. Soit N un point de \mathbb{S}^n , vu comme sous-variété de dimension zéro. Le complémentaire de N est difféomorphe à \mathbb{R}^n donc la suite exacte de paire, fournie par le théorème 8.7 est :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_c^0(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H_c^0(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & H_c^0(N) \\
 & & & & & & \searrow \delta^0 \\
 & & & & & & \longrightarrow H_c^1(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H_c^1(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \searrow \delta^1 \\
 & & & & & & \longrightarrow H_c^2(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H_c^2(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Comme de plus $H^0(\mathbb{S}^n) \rightarrow H^0(N)$ est surjective, on obtient un isomorphisme entre $H_c^k(\mathbb{R}^n)$ et $H^k(\mathbb{S}^n)$ pour tout $k \geq 1$ et $H_c^0(\mathbb{R}^n) \simeq 0$. Le calcul de la cohomologie de \mathbb{S}^n dans le corollaire 8.5 permet de conclure. \square

8.4. Exercices

Exercice 8.1. *Dans le lemme du serpent, montrer l'exactitude en $\ker h$ et en $\operatorname{coker} f$.*

Exercice 8.2. *Démontrer le théorème de Mayer-Vietoris pour la cohomologie à support compact.*

Exercice 8.3. *Calculer la cohomologie de de Rham d'un ruban de Möbius puis d'une bouteille de Klein en utilisant la suite de Mayer-Vietoris. Refaire le calcul en utilisant la suite exacte de paires à la place de celle de Mayer-Vietoris.*

Exercice 8.4. *Soit $f: U \rightarrow V$ un homéomorphisme entre ouverts de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p respectivement. Le but de cet exercice est de montrer que $n = p$. Soit x un point de U , B une boule centrée en x contenue dans U , B' une boule centrée en $f(x)$ contenue dans $f(B)$*

8. Suites exactes longues en cohomologie

et A une boule centrée en x et contenue dans $f^{-1}(B')$. Contempler le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 A \setminus \{x\} & \xrightarrow{f} & B' \setminus \{f(x)\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B \setminus \{x\} & \xrightarrow[\sim]{f} & f(B) \setminus \{f(x)\} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U \setminus \{x\} & \xrightarrow[\sim]{f} & V \setminus \{f(x)\}
 \end{array}$$

puis conclure.

Exercice 8.5. Montrer que le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ des rotations de l'espace agit simplement transitivement sur l'ensemble de vecteurs tangents à \mathbb{S}^2 de norme 1 (pour la norme euclidienne sur \mathbb{R}^3). En déduire que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est la réunion de tores pleins $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, en expliquant comment ces tores sont recollés. Calculer la cohomologie de de Rham de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Soit $f: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ une application d'une variété dans \mathbb{S}^2 . On suppose que f se décompose sous la forme :

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{f_1} & \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{S}^2 \\
 & & \searrow & \nearrow & \\
 & & & f &
 \end{array}$$

Montrer que, même si f est surjective, elle n'admet pas d'inverse à droite continue. Revenir au robot de l'introduction du cours en expliquant pourquoi, quel que soit le système mécanique qui change de façon continue la direction pointée par le robot en appliquant une suite de translations et de rotations dans l'espace au segment terminal, il est impossible de choisir continûment une commande en fonction de la direction souhaitée, même si le système de commande est plus complexe qu'un nombre fini de boutons à pousser ou tourner (cas $M \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^q$).

Démontrer le théorème de la boule chevelue (pour la sphère \mathbb{S}^2).

9. Finitude, dualité et produits

Dans ce chapitre, on exploite les suites exactes de Mayer-Vietoris non plus pour calculer des exemples de cohomologie mais pour démontrer des résultats de structures sur la cohomologie de de Rham. Un point essentiel pour appliquer cette stratégie est d'avoir un recouvrement des variétés étudiées par des ouverts dont la cohomologie est parfaitement comprise (en pratique des boules) et dont les intersections ont aussi cette propriété. La section 9.2 montre que toutes les variétés compactes admettent de tels recouvrements qui permettent d'espérer une approche combinatoire de la cohomologie de de Rham. On en déduit très facilement que la cohomologie de de Rham de ces variétés est de dimension finie, ce qui n'est pas du tout évident au vu de la définition. En particulier on peut extraire de cette théorie une suite de nombres attachés à une variété compacte M : le i -ième nombre de Betti $b_i(M)$ est la dimension de $H^i(M)$.

De façon beaucoup plus profonde, les mêmes recouvrements, les suites de Mayer-Vietoris et une lemme algébrique de la section 9.1 permettent de mettre à jour dans la section 9.3 une symétrie fondamentale de la cohomologie de de Rham : un isomorphisme explicite entre $H^i(M)$ et $H^{n-i}(M)^*$ où $n = \dim(M)$. En particulier $b_i(M) = b_{n-i}(M)$. En considérant comme forme linéaire sur $H^{n-i}(M)$ l'intégration sur une sous-variété S orientée, compacte, sans bord, de dimension $n-i$, on obtient un classe $P(S)$ dans $H^i(M)$ appelée dual de Poincaré de S . Cette construction permet de faire le lien entre la théorie du degré du chapitre 4 et la cohomologie de de Rham. Dans le chapitre suivant, ce lien sera étendu à la théorie de l'intersection et la caractéristique d'Euler.

Le chapitre se termine par une application des mêmes idées au calcul de la cohomologie d'un produit, c'est le théorème de Künneth de la section 9.4.

9.1. Le lemme des cinq

Pour comparer des suites exactes longues en cohomologie il est souvent utile d'avoir un résultat d'algèbre homologique connu sous le nom de lemme des cinq. Il implique en particulier que si un morphisme de suites exactes courtes de complexes comporte deux applications induisant un isomorphisme en cohomologie alors la troisième fait de même.

Proposition 9.1. *Dans le diagramme commutatif suivant, on suppose que les lignes sont exactes.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\
 A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E'
 \end{array}$$

Si α , β , δ et ε sont des isomorphismes alors γ l'est aussi.

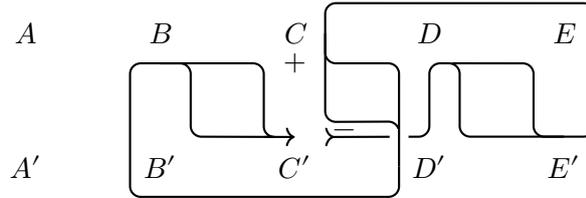
9. Finitude, dualité et produits

Démonstration. On démontre en fait deux résultats un peu plus forts que l'énoncé (mais qu'il est inutile de retenir). Les deux font l'hypothèse que les lignes du diagramme sont exactes.

1. Si β et δ sont surjectifs et ε est injectif alors γ est surjectif.
2. Si β et δ sont injectifs et α est surjectif alors γ est injectif.

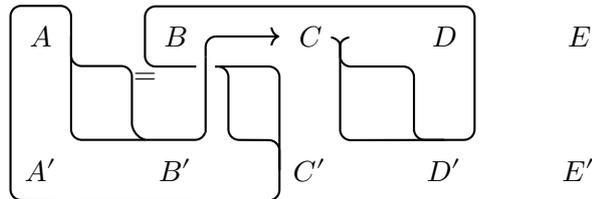
Dans les deux démonstrations, on fait la convention de noter a un élément de A , a' un élément de A' etc.

Montrons l'énoncé 1. Le dessin suivant présente le cheminement de la démonstration.



Soit c' dont on cherche un antécédent par γ . Par surjectivité de δ , il existe d tel que $k'(c') = \delta(d)$. Par commutativité du dernier carré $\varepsilon \circ l(d) = l' \circ \delta(d)$. Par construction de d , cela vaut $l' \circ k'(c')$, qui est nul par exactitude de la ligne du bas en D' . Comme ε est injectif, $l(d) = 0$. Par exactitude de la ligne du haut en D , il existe c tel que $d = k(c)$. On calcule ensuite $k' \circ \gamma(c) = \delta \circ k(c) = \delta(d)$ par commutativité de l'avant-dernier carré et construction de c . Or $\delta(d) = k'(c')$ par construction. Donc $k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - k' \circ \gamma(c) = 0$. Par exactitude de la ligne du bas en C' , il existe b' tel que $j'(b') = c' - \gamma(c)$. Par surjectivité de β , il existe b tel que $\beta(b) = b'$. Par commutativité du deuxième carré, $\gamma \circ j(b) = j' \circ \beta(b)$ qui vaut $j'(b) = c' - \gamma(c)$ par construction. Ainsi $\gamma(c + j(b)) = \gamma(c) + c' - \gamma(c) = c'$ et γ est surjectif.

Montrons maintenant l'énoncé 2. Le dessin suivant présente le cheminement de la démonstration.



On suppose $\gamma(c) = 0$. Alors $0 = k' \circ \gamma(c) = \delta \circ k(c)$ par commutativité de l'avant-dernier carré. Par injectivité de δ , on obtient $k(c) = 0$. Par exactitude de la ligne du haut en C , il existe b tel que $c = j(b)$. Par commutativité du deuxième carré, $j' \circ \beta(b) = \gamma \circ j(b)$. Or ce dernier vaut $\gamma(c) = 0$ par construction de b et hypothèse sur c . Par exactitude de la ligne du bas en B' , il existe donc a' tel que $i'(a') = \beta(b)$. Par surjectivité de α , il existe a tel que $\alpha(a) = a'$. Par commutativité du premier carré, $\beta \circ i(a) = i' \circ \alpha(a)$. Ce dernier vaut $i'(a') = \beta(b)$ par construction. Par injectivité de β , on a donc $i(a) = b$. Par exactitude de la ligne du haut en B , $j(b) = j \circ i(a) = 0$. Or $j(b) = c$ par construction donc c est nul et γ est injectif. \square

9.2. Variétés de type fini

Un *bon recouvrement* d'une variété est un recouvrement par des ouverts dont toute intersection non vide est difféomorphe à \mathbb{R}^n (en fait contractile suffirait mais difféomorphe à \mathbb{R}^n vient naturellement dans la construction ci-dessous). Une variété est de *type fini* si elle admet un bon recouvrement fini.

Théorème 9.2. *Toute variété compacte admet un bon recouvrement fini par des ouverts arbitrairement petits.*

Ce théorème est localement évident puisque tout point d'une variété admet un voisinage difféomorphe à \mathbb{R}^n , qui a un bon recouvrement. Mais il n'est pas évident de passer au résultat global. La démonstration qu'on va présenter repose sur le premier résultat global démontré dans ce cours : le théorème de plongement de Whitney (sans borne sur la dimension). Mais il y a aussi un ingrédient de nature géométrique (par opposition aux arguments purement topologiques) : le résultat de calcul différentiel élémentaire suivant.

Lemme 9.3. *Soit ψ un difféomorphisme entre ouverts de \mathbb{R}^N tel que les normes $\|D\psi\|$, $\|D\psi^{-1}\|$ et $\|D^2\psi^{-1}\|$ soient bornées par un nombre $C > 0$. Il existe un rayon $r(C) > 0$ tel que l'image par ψ d'une boule euclidienne de rayon $r < r(C)$ soit convexe. En fait on peut choisir $r(C) = 1/C^5$ (mais l'important est que ce rayon ne dépende que de C).*

Démonstration. On note U l'ouvert source de ψ et V son image. On note θ l'inverse de ψ . On fixe x_0 dans U et on observe que

$$y \in \psi(B(x_0, r)) \Leftrightarrow \theta(y) \in B(x_0, r) \Leftrightarrow f(y) < r^2$$

où $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ envoie y sur $\|\theta(y) - x_0\|^2$. Il suffit de montrer que f est strictement convexe sur l'image d'une petite boule. On calcule sa hessienne :

$$\text{Hess } f(y)(v, w) = 2 \langle \theta(y) - x_0, D^2\theta(y)(v, w) \rangle + 2 \langle D\theta(y)(v), D\theta(y)(w) \rangle.$$

Or

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \|D\theta(y)^{-1} \circ D\theta(y)(v)\|^2 = \|D\psi(\theta(y)) \circ D\theta(y)(v)\|^2 \\ &\leq C^2 \|D\theta(y)(v)\|^2 \end{aligned}$$

et $\|\theta(y) - x_0\| = \|\theta(y) - \theta(\psi(x_0))\| \leq C\|y - \psi(x_0)\|$ par le théorème des accroissements finis donc, en posant $y_0 = \psi(x_0)$,

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(y)(v, v) &\geq -2C^2\|y - y_0\|\|v\|^2 + \frac{2}{C^2}\|v\|^2 \\ &= 2 \left(\frac{1}{C^2} - C^2\|y - y_0\| \right) \|v\|^2. \end{aligned}$$

qui est bien strictement positif pour v non nul tant que y est à distance au plus $1/C^4$ de y_0 . Or le théorème des accroissements finis montre que $\psi(B(x_0, r))$ est inclus dans $B(y_0, 1/C^4)$ dès que r est inférieur à $r(C) = 1/C^5$. \square

9. Finitude, dualité et produits

On aura aussi besoin d'un résultat classique de topologie, le lemme de recouvrement de Lebesgue (qui n'a rien à voir avec sa construction d'une théorie de l'intégration).

Lemme 9.4. *Soit (X, d) un espace métrique compact. Pour tout recouvrement $(U_i)_i$ de X par des ouverts, il existe $\delta > 0$ tel que toute boule de rayon inférieur à δ est contenue dans l'un des U_i .*

Dans le contexte de l'énoncé ci-dessus, on dit que δ est un *nombre de Lebesgue* du recouvrement par les U_i . La conclusion implique bien sûr que toute partie de diamètre inférieur à δ est incluse dans l'un des U_i .

Démonstration. Par compacité de X , on peut extraire des U_i un sous-recouvrement fini et oublier le reste. On note F_i le fermé complémentaire de U_i et n le nombre d'ouverts du recouvrement. On définit sur X la fonction f envoyant x sur $\sum_i d(x, F_i)/n$ (moyenne des distances aux F_i). Il s'agit d'une fonction continue donc, par compacité de X , elle atteint son inf δ en un certain point x_0 . Comme x_0 est dans l'un au moins des U_i , $\delta > 0$. Ce δ convient car, pour tout point x , la moyenne des distances aux F_i vaut au moins δ donc l'une au moins de ces distances vaut au moins δ , ce qui signifie exactement que l'ouvert U_i correspondant contient $B(x, \delta)$. \square

Démonstration du théorème 9.2. Soit V une variété compacte. D'après le théorème 3.3, il est loisible de supposer que V est une sous-variété d'un espace euclidien \mathbb{R}^N . Soit $\{\psi_i : W_i \rightarrow \mathbb{R}^N\}$ un atlas de sous-variété pour V . Chaque ψ_i est un difféomorphisme sur son image et $\psi(V \cap W_i) = H \cap \psi_i(W_i)$ pour un sous-espace vectoriel $H \subset \mathbb{R}^N$ de dimension $n = \dim(V)$. Par compacité de V , on peut supposer cet atlas fini et, quitte à réduire les W_i sans qu'ils cessent de recouvrir V , on peut supposer que les W_i sont relativement compacts et que toutes les normes des différentielles premières et secondes des ψ_i et leurs inverses sont bornées par une certaine constante C . Soit r_0 un rayon strictement positif inférieur au rayon $r(C)$ fourni par le lemme de convexité 9.3 et qui est un nombre de Lebesgue du recouvrement de la réunion des adhérences \bar{W}_i par les \bar{W}_i , fourni par le lemme 9.4.

Pour tout x dans V , on pose $U_x = B(x, r_0/4) \cap V$, la boule utilisée étant une boule euclidienne de l'espace ambiant \mathbb{R}^N . Montrons que la famille des U_x forme un bon recouvrement (dont on peut ensuite extraire un bon recouvrement fini par compacité de V). Soit x_0, \dots, x_k des points de V . On note $U_j = U_{x_j}$ pour alléger l'écriture. Supposons non vide l'intersection $I = U_0 \cap \dots \cap U_k$. Par inégalité triangulaire, tous les U_j sont dans la boule $B(x_0, r_0)$. Cette dernière est dans l'un des ouverts de carte W_i . On a :

$$\psi_i(I) = \bigcap_j \psi_i(U_j) = \bigcap_j \psi_i(B(x_j, r_0/4)) \cap H$$

donc $\psi_i(I)$ est un ouvert convexe non vide dans $H \simeq \mathbb{R}^n$, donc $I \simeq \psi_i(I) \simeq \mathbb{R}^n$. \square

Avec le théorème 9.2, on peut obtenir des ouverts suffisamment petits pour être contenus dans des ouverts de trivialisations locales de n'importe quel fibré. Ainsi un fibré à fibres de type fini au-dessus d'une variété de type fini est de type fini. En particulier cela démontre le corollaire suivant.

Corollaire 9.5. *Tout fibré vectoriel au-dessus d'une variété compacte est de type fini.*

Comme promis, l'existence d'un recouvrement combinatoire permet d'obtenir des résultats de structure de la cohomologie de de Rham. Le plus grossier, mais néanmoins fondamental est le théorème de finitude suivant.

Théorème 9.6. *La cohomologie de de Rham et la cohomologie de de Rham à support compact d'une variété de type fini est de dimension finie. En particulier cela vaut pour les variétés compactes.*

Ce résultat n'a rien d'évident puisque les espaces de formes différentielles fermées ou exactes sont de dimension infinie dans tous les cas (sauf si la variété étudiée est de dimension zéro...). Avant de démontrer ce théorème, on a en extrait des invariants numériques des variétés qui ont précédé historiquement toute théorie homologique ou cohomologique.

Définition 9.7. *Le i -ème nombre de Betti d'une variété M de type fini est la dimension $b_i(M)$ de $H_c^i(M)$. Le nombre de Betti total $b(M)$ est la somme des nombres de Betti $b_i(M)$.*

Démonstration du théorème 9.6. On explique le cas de la cohomologie de de Rham, sans condition de support, le cas du support compact étant complètement analogue, en utilisant le théorème 8.6 en lieu et place du théorème 8.4 (ce sont les deux variantes de la suite exacte de Mayer-Vietoris).

On déjà vu dans le corollaire 7.9 que la cohomologie de de Rham de \mathbb{R}^n est de dimension finie. C'est donc le cas de tous les ouverts et intersections d'ouverts d'un bon recouvrement d'une variété de type fini. On démontre le théorème par récurrence sur le nombre d'ouverts d'un bon recouvrement. Le cas d'un seul ouvert est celui de \mathbb{R}^n . Supposons donc le théorème acquis jusqu'à p ouverts. Soit M une variété ayant un bon recouvrement par $p + 1$ ouverts U_0, \dots, U_p . On pose $U = U_0$ et $V = U_1 \cup \dots \cup U_p$. On remarque que U a un bon recouvrement par un ouvert, V a un bon recouvrement par p ouverts et que $U \cap V$ aussi, les ouverts étant les $U_0 \cap U_i$. Or la suite exacte longue de Mayer-Vietoris contient pour tout k

$$\dots \longrightarrow H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^k(U \cup V) \xrightarrow{j_U^* \oplus j_V^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow \dots$$

où les premier et troisième termes sont de dimension finie par hypothèse de récurrence. Donc $H^k(U \cup V) / \ker(j_U^* \oplus j_V^*)$, qui est isomorphe à $\text{im}(j_U^* \oplus j_V^*)$, est de dimension finie. De plus $\ker(j_U^* \oplus j_V^*)$ est égal à $\text{im } \delta$ donc de dimension finie. \square

9.3. Dualité de Poincaré

La dualité de Poincaré est une symétrie fondamentale de la cohomologie d'une variété orientable sans bord. Pour la décrire on a besoin d'un petit rappel d'algèbre linéaire. Soit $P: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire entre \mathbb{K} -espaces vectoriels. Elle induit une

9. Finitude, dualité et produits

application linéaire de E dans F^* , envoyant e sur $P(e, \cdot)$ et de F dans E^* envoyant f sur $P(\cdot, f)$. On rappelle que P est dite non dégénérée si ces deux applications sont injectives. On a alors $\dim E \leq \dim F^*$ et $\dim F \leq \dim E^*$. Si E et F sont de dimension finie (comme dans la conclusion du théorème 9.6 par exemple) alors $\dim E^* = \dim E$, $\dim F^* = \dim F$ et les applications ci-dessus sont des isomorphismes de E vers F^* et de F vers E^* respectivement.

On peut maintenant énoncer le théorème. Il sera démontré à la fin de la section, après en avoir discuté quelques applications immédiates.

Théorème 9.8. *Soit M une variété de dimension n , de type fini, orientée et sans bord. La forme bilinéaire sur $\Omega^p(M) \times \Omega_c^{n-p}(M)$ qui envoie (ω, η) sur $\int_M \omega \wedge \eta$ est non dégénérée. Ainsi elle induit des isomorphismes $H^p(M) \simeq H_c^{n-p}(M)^*$ et $H^p(M)^* \simeq H_c^{n-p}(M)$. En particulier, si M est compacte, $b_p(M) = b_{n-p}(M)$ pour tout p .*

L'image d'une classe par un des isomorphismes du théorème est appelée son *dual de Poincaré*.

En appliquant le théorème à une variété connexe avec pour ω la fonction valant 1 partout, on obtient que, pour M connexe, l'intégration sur M toute entière induit un isomorphisme $H_c^n(M)^* \simeq \mathbb{R}$. Dit autrement, $H_c^n(M)$ est une droite et possède un vecteur directeur canonique, la classe de cohomologie de n'importe quelle forme ω vérifiant $\int_M \omega = 1$. Dit encore autrement, deux formes de degré maximal sur M sont cohomologues si et seulement si elles ont même intégrale sur M .

Soit S une sous-variété orientée compacte sans bord dans une variété orientée M . On note p la dimension de S et n celle de M . La formule de Stokes assure que l'intégration sur S , qui est une forme linéaire sur $\Omega^p M$, induit une forme linéaire sur $H^p(M)$. En effet toute forme exacte est d'intégrale nulle sur S . Le théorème de dualité de Poincaré ci-dessus fournit alors une classe de cohomologie $P(S)$ dans $H_c^{n-p}(M)$ appelée *dual de Poincaré* de S . En déroulant les définitions, on voit que $P(S)$ est caractérisée par l'égalité

$$\int_M [\eta] \wedge P(S) = \int_S \eta \quad \forall \eta \in \Omega^p M \text{ fermée.}$$

À ce stade on peut dire que le passage de S à $P(S)$ est légèrement mystérieux et que ce mystère n'est pas vraiment levé par la démonstration du théorème 9.8. Ce problème sera attaqué en toute généralité dans le chapitre suivant. En attendant on peut appliquer cette construction au cas où S est un point, orienté positivement. On note $P(\text{pt})$ la classe obtenue dans $H_c^n(M)$, c'est le générateur canonique trouvé précédemment (M étant supposée connexe). En effet une 0-forme fermée est une fonction f constante et la caractérisation devient $\int_M f P(\text{pt}) = \int_{\text{pt}} f$. Cela équivaut à $\int_M P(\text{pt}) = 1$ puisque f est constante.

Théorème 9.9. *Soit $f: M \rightarrow N$ une application entre variétés connexes, compactes, sans bord, orientées et de même dimension. Soit pt_M et pt_N des points de M et N respectivement. Le degré de f est caractérisé cohomologiquement par*

$$f^* P(\text{pt}_N) = \deg(f) P(\text{pt}_M).$$

Plus concrètement, pour toute forme ω de degré maximal sur N et vérifiant $\int_N \omega = 1$, on a

$$\deg(f) = \int_M f^* \omega$$

Démonstration. L'équivalence entre les deux formulations a déjà été expliquée avant l'énoncé, ainsi que le fait que toutes les formes sur ω d'intégrale 1 sont cohomologues.

Soit n une valeur régulière de f , fournie par le théorème de Sard (théorème 4.5). L'image réciproque de n par f est une collection finie de points m_1, \dots, m_p . En chaque m_i , la dérivée $T_{m_i} f$ est un isomorphisme entre $T_{m_i} M$ et $T_n N$ et la contribution de m_i au degré de f est ± 1 selon que cet isomorphisme préserve l'orientation ou la renverse. Le rang de $T_m f$ reste maximal sur un voisinage ouvert U_i de m_i . Le théorème d'inversion local montre que, quitte à rétrécir U_i , f est un difféomorphisme de U_i sur $f(U_i)$. Quitte à rétrécir encore un peu, on peut supposer les U_i connexes et deux à deux disjoints. On choisit alors une forme ω à support compact dans l'intersection V des $f(U_i)$ et d'intégrale 1 et on calcule :

$$\begin{aligned} \int_M f^* \omega &= \int_{f^{-1}(V)} f^* \omega \\ &= \sum_i \int_{U_i \cap f^{-1}(V)} f^* \omega \\ &= \sum_i \pm \int_{f(U_i)} \omega \\ &= \deg(f) \end{aligned}$$

où le signe \pm provient de la contrainte d'orientation dans la formule de changement de variable. □

Démonstration du théorème 9.8. On remarque que le théorème de finitude (théorème 9.6) s'applique ici, donc la non dégénérescence de la forme bilinéaire de Poincaré est équivalente aux isomorphismes annoncés. Dans la démonstration on utilise la formulation en terme des applications $P_M: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M)^*$ qui envoient ω sur $\eta \mapsto \int_M \omega \wedge \eta$.

On montre le théorème par récurrence sur le nombre de cartes d'un bon recouvrement. L'initialisation est assurée par les corollaires 7.9 et 8.8 calculant les cohomologie et cohomologie à support compact de \mathbb{R}^n .

Comme dans la démonstration du théorème de finitude, l'étape de récurrence repose sur les suites longues de Mayer-Vietoris mais cette fois on applique les deux variantes simultanément. Pour cela il faut s'affranchir d'un souci de signe mineur. On considère l'opérateur $d = (-1)^{k+1} d$ allant de $\Omega^k M$ dans $\Omega^{k+1} M$. Comme le suggère la notation, la différence avec d est minime. Le nouvel opérateur a même image et même noyau que d , il définit donc la même cohomologie. On peut vérifier aussi (même si c'est inutile) que la suite de Mayer-Vietoris pour d ne diffère de celle de d que par un signe dans le

9. Finitude, dualité et produits

connectant. L'avantage de d est que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Omega^\bullet(U \cup V) & \xrightarrow{j_U^* \oplus j_V^*} & \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) & \xrightarrow{i_U^* - i_V^*} & \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow P_{U \cup V} & & \downarrow P_U \oplus P_V & & \downarrow P_{U \cap V} \\
 0 & \longrightarrow & \Omega_c^{n-\bullet}(U \cup V)^* & \xrightarrow{t(j_U^* \oplus j_V^*)} & \Omega_c^{n-\bullet}(U)^* \oplus \Omega_c^{n-\bullet}(V)^* & \xrightarrow{t(i_U^* - i_V^*)} & \Omega_c^{n-\bullet}(U \cap V)^* \longrightarrow 0
 \end{array}$$

devient un morphisme de suites exactes courtes, où chaque $\Omega_c^{n-\bullet}(A)^*$ est un complexe ayant comme différentielle la transposée de d pour chaque ouvert A . En effet, on a :

$$P_A \circ d(\omega) = \eta \mapsto \int_A (-1)^{k+1} d\omega \wedge \eta$$

et

$${}^t d \circ P_A(\omega) = \eta \mapsto \int_A \omega \wedge d\eta$$

donc la différence entre les deux vaut

$$\begin{aligned}
 ({}^t d \circ P_A - P_A \circ d)(\omega) &= \eta \mapsto \int_A \omega \wedge d\eta + (-1)^k d\omega \wedge \eta \\
 &= \eta \mapsto \int_A d(\omega \wedge \eta) = 0
 \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Stokes appliquée à une grande boule fermée dans $A \simeq \mathbb{R}^n$ et le fait que $\omega \wedge \eta$ est à support compact dans A donc il n'y a pas de terme de bord.

La naturalité dans le théorème 8.1 fournit un morphisme de suites exactes longues entre la suite de Mayer-Vietoris ordinaire et la suite duale de la suite de Mayer-Vietoris à support compact. Dans ce morphisme de suites, deux flèches sur trois sont des isomorphismes par hypothèse de récurrence et on conclut par le lemme des cinq. \square

9.4. Théorème de Künneth

La technique employée dans la démonstration du théorème de dualité de Poincaré (combinant suite de Mayer-Vietoris, naturalité des suites exactes longues induites en cohomologie et lemme des cinq) peut être employée pour démontrer facilement le résultat suivant.

Théorème 9.10. *Soit M et N deux variétés, l'une d'entre elle au moins étant de type fini. On note p et q les projections de $M \times N$ sur les facteurs M et N respectivement. L'application $\omega \otimes \eta \mapsto \omega \times \eta := p^* \omega \wedge q^* \eta$ induit un isomorphisme*

$$\bigoplus_{k+l=m} H^k(M) \otimes H^l(N) \simeq H^m(M \times N).$$

La même formule est valable pour la cohomologie à support compact.

9.4. Théorème de Künneth

Dans le cas le plus courant, les deux variétés sont de type fini et on peut considérer des bases $([\omega_1], \dots, [\omega_{b(M)}])$ et $([\eta_1], \dots, [\eta_{b(N)}])$ de $H^*(M)$ et $H^*(N)$ respectivement. Concrètement, le théorème de Künneth assure que la famille des $[\omega_i \times \eta_j]$ forme une base de $H^*(M \times N)$. On peut remarquer que, si M et N sont toutes deux orientables et de type fini, les versions ordinaire et à support compact de la formule de Künneth sont équivalentes via la dualité de Poincaré.

10. Intersection en cohomologie de de Rham

Le but de ce chapitre est de faire le lien entre les nombres d'intersection définis au chapitre 4, la dualité de Poincaré et le produit extérieur en cohomologie de de Rham via une description plus géométrique du dual de Poincaré d'une sous-variété.

Théorème 10.1. *Soit S et T deux sous-variété orientées compactes sans bord dans une variété orientée M avec $\dim(S) + \dim(T) = \dim(M)$. Le nombre d'intersection entre S et T est l'intégrale sur M du produit extérieur de leurs duaux de Poincaré :*

$$\#(S, T) = \int_M P(S) \wedge P(T).$$

En utilisant ce résultat et le théorème de Künneth on obtient une interprétation cohomologique de la caractéristique d'Euler.

Théorème 10.2. *La caractéristique d'Euler d'une variété compacte, définie comme auto-intersection de la section nulle de son fibré tangent, est la somme alternée de ses nombres de Betti :*

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{\dim(M)} (-1)^i b_i(M).$$

10.1. Intersection et dualité de Poincaré

Le lien entre le nombre d'intersection du chapitre 4 et la cohomologie de de Rham est basé sur une description géométrique du dual de Poincaré d'une sous-variété en termes de voisinages tubulaires.

On rappelle que le chapitre 3 a défini la notion de voisinage tubulaire d'une sous-variété $S \subset M$ comme étant un difféomorphisme e entre un voisinage V de la section nulle dans le fibré normal $\pi: \nu S \rightarrow S$ qui est convexe dans chaque fibre et un voisinage U de S . Le voisinage U est alors équipé de la projection p qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim_e} & U \\ \downarrow & & \searrow p \\ \nu S & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

10. Intersection en cohomologie de de Rham

Selon les circonstances, on désigne aussi par voisinage tubulaire la projection p , ou même U . Lorsque S et M sont orientées, on oriente les fibres de p en imposant que, en tout point s de S , une base directe de $T_s S$ suivie d'une base directe de $T_s(p^{-1}(s))$ fournisse une base directe de $T_s M$. Enfin on remarque que le corollaire 9.5 assure qu'un voisinage tubulaire d'une sous-variété compacte est une variété de type fini. On peut alors décrire comme suit le dual $P(S)$.

Proposition 10.3. *Soit S une sous-variété de codimension r compacte orientée sans bord dans une variété compacte orientée M . Pour tout voisinage tubulaire $p: U \rightarrow S$, il existe une forme fermée $\tau \in \Omega_c^r M$ à support dans U telle que :*

- sa classe de cohomologie est le dual de Poincaré $P(S)$;
- pour tout s dans S , $\int_{p^{-1}(s)} \tau = 1$.

De plus la deuxième propriété caractérise les représentants de $P(S)$ parmi les formes à support dans U .

Avant de démontrer cette proposition, on énonce un lemme de construction de voisinages tubulaires adaptés à certaines paires de variétés et on déduit le théorème 10.1 de ces deux énoncés.

Lemme 10.4. *Soit S et T deux sous-variétés compactes sans bord dans une variété M . Si $\dim(S) + \dim(T) = \dim(M)$ et S et T sont transversales alors il existe un voisinage tubulaire $p: U \rightarrow S$ de S tel que $T \cap U = p^{-1}(T \cap S)$.*

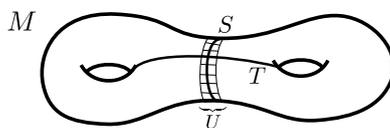


FIG. 10.1.: Voisinage tubulaire adapté à une paire de sous-variétés S et T transversales et de dimensions complémentaires.

Indications de démonstration. Il faut vérifier au moyen du théorème d'inversion locale que, sous les hypothèses du lemme, il existe autour de chaque point de $S \cap T$ une carte de M dans laquelle S devient $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ tandis que T devient $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$. On ajoute ensuite assez de cartes pour recouvrir M et, quitte à rétrécir certaines cartes, les points de $S \cap T$ n'appartiennent qu'à une seule carte. On peut alors suivre les constructions du plongement de Whitney et des voisinages tubulaires dans le chapitre 3 et constater que le voisinage obtenu vérifie les propriétés souhaitées. \square

Démonstration du théorème 10.1. On commence par remarquer qu'il est loisible de supposer S et T transversales. En effet, le théorème de transversalité de Thom (théorème 4.9) fournit une isotopie $\varphi: [0, 1] \times M \rightarrow M$ telle que $\varphi_1(S)$ soit transversale à T . Comme l'inclusion ι de S dans M et $\varphi_1 \circ \iota$ sont homotopes (via $\varphi_t \circ \iota$), le théorème de Stokes

assure que l'intégrale d'une forme fermée sur S coïncide avec son intégrale sur $\varphi_1(S)$ donc $P(S) = P(\varphi_1(S))$. De plus $\#(S, T) = \#(\varphi_1(S), T)$ d'après le théorème 4.10.

Le lemme 10.4 fournit un voisinage tubulaire $p: U \rightarrow S$ de S tel que $T \cap U = p^{-1}(T \cap S)$. Ainsi $\#(S, T)$ est une somme sur $s_i \in S \cap T$ de ± 1 où le signe est positif si les orientations sur $T \cap p^{-1}(s_i)$ données par T et par $p^{-1}(s_i)$ coïncident et négatif sinon.

On veut comparer cette somme avec :

$$\int_M P(S) \wedge P(T) = \int_T P(S).$$

Soit τ un représentant de $P(S)$ fourni par la proposition 10.3 appliquée au voisinage tubulaire U . Comme τ est à support dans U , son intégrale sur T est égale à son intégrale sur $T \cap U$. Comme τ est d'intégrale 1 sur toutes les fibres de p , on obtient bien la même somme que dans le calcul de $\#(S, T)$. \square

On commence maintenant le travail menant à la démonstration de la proposition 10.3 décrivant géométriquement le dual de Poincaré d'une sous-variété. On se place dans un contexte légèrement plus général que celui d'un fibré normal car cela ne coûte rien. On y développe juste ce qu'il faut de la théorie des *classes de Thom* pour démontrer la proposition visée.

Soit $\pi: E \rightarrow S$ un fibré vectoriel de rang r à fibres orientées au-dessus d'une variété S de dimension k . On définit l'intégration le long des fibres π_* comme l'application de $\Omega_c^r E$ dans $\Omega^0 S$ qui envoie η sur la fonction

$$\pi_* \eta: x \mapsto \int_{\pi^{-1}(x)} \eta.$$

Plus généralement on peut définir $\pi_*: \Omega_c^{r+l} E \rightarrow \Omega^l S$ mais le cas où $l = 0$ est le plus simple et suffira ici.

On oriente E de sorte que, si $(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r)$ est une base de $T_e E$ avec u_1, \dots, u_r tangents à la fibre et y définissant la bonne orientation alors $(T_e \pi(v_1), \dots, T_e \pi(v_k))$ est une base de S (on dit que c'est la convention d'orientation « la base d'abord »). Dans le cas où $E = \nu S$, cette convention est bien compatible avec la convention d'orientation des voisinages tubulaires discutée plus haut.

On a alors deux propriétés essentielles de l'intégration le long des fibres qui découlent respectivement du théorème de Fubini et de la formule de Stokes.

Lemme 10.5. *Soit $\pi: E \rightarrow S$ un fibré vectoriel de rang r au-dessus d'une variété S connexe de dimension n .*

1. *Pour tous $\omega \in \Omega^n S$ et $\tau \in \Omega_c^r E$, on a la « formule de projection » :*

$$\int_S \pi_* \tau \cdot \omega = \int_E \pi^* \omega \wedge \tau.$$

2. *Si $\tau \in \Omega_c^r E$ est fermée alors la fonction $\pi_* \tau$ est constante.*

10. Intersection en cohomologie de de Rham

Le deuxième point est une version faible du véritable résultat $\pi_* \circ d = d \circ \pi_*$ mais la version faible nous suffira. La version forte, étendue aux formes de tout degré, permet de descendre π_* en cohomologie et le premier point devient alors $P_S(\cdot, \pi_*) = P_E(\pi^* \cdot, \cdot)$ où P_S et P_E sont les applications bilinéaires de la dualité de Poincaré. On peut donc voir la formule de projection comme une relation d'adjonction entre π_* et π^* .

Démonstration. Le premier point découle du théorème de Fubini et l'existence de partitions de l'unité sur S appliqué à un recouvrement de S par des ouverts de trivialisations de E . En effet les deux membres sont linéaires en ω et compatibles aux isomorphismes de fibrés vectoriels. Donc les partitions de l'unité permettent de supposer que ω est à support dans un ouvert de carte au-dessus duquel E est trivial, c'est à dire qu'on peut supposer que $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$. On note (x_1, \dots, x_n) les coordonnées sur \mathbb{R}^n et (f_1, \dots, f_r) celles sur \mathbb{R}^r . On écrit alors $\tau = g(x, f)df_1 \wedge \dots \wedge df_n + \tau'$ où τ' est combinaison des autres vecteurs de la base canonique de $\Lambda^r(T^*E)$ en chaque point. En particulier chaque composante de τ' contient au moins un dx_i et $\tau' \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 0$. On écrit aussi $\omega = h(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Ainsi

$$\pi_*\tau(x) = \int_{\mathbb{R}^r} g(x, f)df$$

tandis que $\pi^*\omega \wedge \tau = h(x)g(x, f)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_n$ donc le théorème de Fubini assure bien l'égalité voulue.

On montre maintenant que $\pi_*\tau$ est constante si τ est fermée. Par connexité de M , il suffit de montrer que $\pi_*\tau$ est constante en restriction à n'importe quelle courbe γ reliant deux points quelconques x et y . On applique la formule de Stokes :

$$\begin{aligned} \pi_*\tau(y) - \pi_*\tau(x) &= \int_{\pi^{-1}(y)} \tau - \int_{\pi^{-1}(x)} \tau \\ &= \int_{\pi^{-1}(\gamma)} d\tau \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\pi_*\tau$ est constante. □

Proposition 10.6. *Soit $\pi : E \rightarrow S$ un fibré vectoriel de rang r à fibres orientées au-dessus d'une variété compacte sans bord. Pour tout voisinage V de la section nulle dans E , toute classe de $H_c^*(E)$ est représentée par une forme fermée à support compact dans V . Parmi ces formes, celles représentant le dual de Poincaré de la section nulle sont caractérisées par $\pi_*\tau = 1$.*

Démonstration de la proposition 10.6. Soit τ une forme fermée à support compact dans E . Il existe $\lambda \in]0, 1]$ tel que l'homothétie h dans les fibres de rapport λ envoie le support de τ dans V . On remplace τ par $h^*\tau$ sans changer sa classe de cohomologie car h est propre et proprement homotope à l'identité (le fait que λ soit non nul est ici crucial).

On note $\iota: S \rightarrow E$ la section nulle. Par définition, les formes τ représentant le dual de Poincaré $P(S)$ (en identifiant S et $\iota(S)$) sont caractérisées par :

$$\forall \sigma \in \Omega^n E \text{ fermée, } \int_E \sigma \wedge \tau = \int_S \iota^* \sigma.$$

Or π est une rétraction de E sur sa section nulle (toujours identifié à S). En particulier $\pi^*: H^n(S) \rightarrow H^n(E)$ et $\iota^*: H^n(E) \rightarrow H^n(S)$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre (corollaire 7.8). En tenant aussi compte du fait que toute n -forme sur S est fermée, on peut donc réécrire la caractérisation ci-dessus comme :

$$\forall \omega \in \Omega^n S, \int_E \pi^* \omega \wedge \tau = \int_S \omega.$$

La formule de projection du lemme 10.5 réécrit cela

$$\forall \omega \in \Omega^n S, \int_S \pi_* \tau \omega = \int_S \omega.$$

Comme τ est fermée, le lemme 10.5 assure que $\pi_* \tau$ est une fonction constante. De plus il existe une forme ω d'intégrale non nulle sur S car S est orientable. On a donc la caractérisation annoncée. \square

La démonstration est essentiellement terminée modulo un résultat de localisation à peu près tautologique.

Lemme 10.7. *Soit S une sous-variété de codimension r compacte orientée sans bord d'une variété orientée de type fini M . Soit U un voisinage ouvert de type fini de S . On note j l'inclusion de U dans M et $P_M(S)$ (resp. $P_U(S)$) le dual de Poincaré de S dans $H_c^r(M)$ (resp. $H_c^r(U)$). On a $P_M(S) = j_{\#}(P_U(S))$.*

Démonstration. Soit k la dimension de S . On note I_M et I_U l'intégration sur S vue comme forme linéaire sur $H^k(M)$ et $H^k(U)$ respectivement. Ainsi, par définition, $P_M(S) = P^{-1}(I_M)$ et $P_U(S) = P^{-1}(I_U)$ où on note P l'isomorphisme de Poincaré à la fois pour U et M . On a bien sûr $I_M = I_U \circ j^*$, qu'on réécrit $I_M = {}^t j^*(I_U)$.

L'autre remarque tautologique est que, si τ est à support compact dans U alors, pour toute forme ω sur M , $\int_U \tau \wedge j^* \omega = \int_M j_{\#} \tau \wedge \omega$. Ainsi le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H_c^r(U) & \xrightarrow{P} & H^k(U)^* \\ \downarrow j_{\#} & & \downarrow {}^t j^* \\ H_c^r(M) & \xrightarrow{P} & H^k(M)^* \end{array}$$

donc $P_M(S) = P^{-1}(I_M) = P^{-1}({}^t j^*(I_U)) = j_{\#}(P^{-1}(I_U)) = j_{\#}(P_U(S))$. \square

Démonstration de la proposition 10.3. Le lemme 10.7 de localisation montre qu'on peut se concentrer sur le voisinage tubulaire U . Par définition, la structure de ce dernier provient du fibré vectoriel $E = \nu S \rightarrow S$. La proposition 10.6 donne alors la conclusion. \square

10.2. Formule de décomposition de la diagonale

Soit M une variété orientée compacte sans bord. Le théorème de finitude (théorème 9.6) assure l'existence d'une base finie $([\omega_1], \dots, [\omega_{b(M)}])$ de $H^*(M)$. Pour tout i , on note $[\omega^i]$ l'image inverse par la dualité de Poincaré du i -ème vecteur de la base duale. Ainsi les ω^i sont des formes fermées dont la classe de cohomologie est caractérisée par

$$\int_M \omega^i \wedge \omega_j = \delta_j^i.$$

Proposition 10.8. *Soit M une variété orientée compacte sans bord. Soit Δ la diagonale $\{(m, m); m \in M\}$ dans $M \times M$. Avec les notations ci-dessus, on a*

$$P(\Delta) = \sum_i (-1)^{|\omega^i|} \omega^i \times \omega_i.$$

On commence par une remarque qui sera utile dans la démonstration de la proposition mais aussi dans celle du théorème 10.2.

Soit p et q les projections de $M \times M$ sur ses deux facteurs. Si on note δ l'application de M dans Δ qui envoie m sur (m, m) , on a $p \circ \delta = q \circ \delta = \text{Id}_M$ donc, pour toutes formes α et β sur M ,

$$\int_{\Delta} \alpha \times \beta = \int_{\delta(M)} p^* \alpha \wedge q^* \beta = \int_M \alpha \wedge \beta.$$

Démonstration de la proposition 10.8. On commence par remarquer que les ω^i forment aussi une base de $H^*(M)$. Le théorème de Künneth assure alors que les $\omega^i \times \omega_j$ forment une base de $H^*(M \times M)$. Ainsi il existe des coefficients réels c_j^i tels que

$$P(\Delta) = \sum_{i,j} c_j^i \omega^i \times \omega_j.$$

Le même théorème assure aussi que les $\omega_k \times \omega^l$ forment une base de $H^*(M \times M)$. Il suffit donc de tester $P(\Delta)$ contre ces classes de cohomologie pour calculer les c_j^i . D'une part on a, par définition de la dualité de Poincaré :

$$\begin{aligned} \int_{M \times M} (\omega_k \times \omega^l) \wedge P(\Delta) &= \int_{\Delta} \omega_k \times \omega^l \\ &= \int_M \omega_k \wedge \omega^l \\ &= (-1)^{|\omega_k| \cdot |\omega^l|} \int_M \omega^l \wedge \omega_k \\ &= (-1)^{|\omega_k| \cdot |\omega^l|} \delta_k^l. \end{aligned}$$

10.2. Formule de décomposition de la diagonale

Et d'autre part, en fonction des coefficients c_j^i inconnus :

$$\begin{aligned}
 \int_{M \times M} (\omega_k \times \omega^l) \wedge P(\Delta) &= \sum_{i,j} c_j^i \int_{M \times M} (\omega_k \times \omega^l) \wedge (\omega^i \times \omega_j) \\
 &= \sum_{i,j} c_j^i \int_{M \times M} p^* \omega_k \wedge q^* \omega^l \wedge p^* \omega^i \wedge q^* \omega_j \\
 &= \sum_{i,j} (-1)^{|\omega^l| \cdot |\omega^i|} c_j^i \int_{M \times M} p^* (\omega_k \wedge \omega^i) \wedge q^* (\omega^l \wedge \omega_j) \\
 &= \sum_{i,j} (-1)^{|\omega^l| \cdot |\omega^i|} c_j^i \int_M \omega_k \wedge \omega^i \int_M \omega^l \wedge \omega_j \\
 &= \sum_{i,j} (-1)^{|\omega^l| \cdot |\omega^i| + |\omega_k| \cdot |\omega^i|} c_j^i \int_M \omega^i \wedge \omega_k \int_M \omega^l \wedge \omega_j \\
 &= \sum_{i,j} (-1)^{|\omega^l| \cdot |\omega^i| + |\omega_k| \cdot |\omega^i|} c_j^i \delta_k^i \delta_j^l \\
 &= (-1)^{|\omega^l| \cdot |\omega^k| + |\omega_k| \cdot |\omega^k|} c_l^k
 \end{aligned}$$

Ainsi $c_l^k = (-1)^{|\omega^l| \cdot |\omega^k| + |\omega_k| \cdot |\omega^k| + |\omega_k| \cdot |\omega^l|} \delta_k^l$ est nul si $l \neq k$ et sinon vaut $(-1)^{|\omega^k|}$. \square

La caractérisation cohomologique de la caractéristique d'Euler découle immédiatement de la formule de décomposition de Künneth de la diagonale et du lien entre intersection et dualité de Poincaré.

Démonstration du théorème 10.2. N'importe laquelle de ces projections induit un isomorphisme de fibrés vectoriels entre $\nu\Delta$ et TM donc il suffit de calculer $\#(\Delta, \Delta)$. D'après le théorème 10.1 et la proposition 10.8 (dont on reprend les notations), on a

$$\begin{aligned}
 \#(\Delta, \Delta) &= \int_{\Delta} P(\Delta) \\
 &= \sum_i (-1)^{|\omega^i|} \int_{\Delta} \omega^i \times \omega_i \\
 &= \sum_i (-1)^{|\omega^i|} \int_M \omega^i \wedge \omega_i \\
 &= \sum_i (-1)^{|\omega^i|} \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\{i; |\omega^i|=j\}} (-1)^j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n (-1)^j b_j(M). \quad \square
 \end{aligned}$$

10.3. Théorème de Lefschetz

Le théorème 10.1 et la proposition 10.8 entraînent aussi, par un calcul à peine plus élaboré que celui qui précède, la *formule de point fixe de Lefschetz*. Soit M une variété orientée compacte sans bord. Soit f une application de M dans M et Γ_f son graphe : $\Gamma_f = \{(m, f(m)) ; m \in M\}$. Les points fixes de f correspondent aux intersections de Γ_f et de la diagonale Δ . Puisque $T\Gamma_f = \{(v, Tf(v)) ; v \in TM\}$ et $T\Delta = \{(v, v) ; v \in TM\}$, ces intersections sont transversales si et seulement si, pour chaque point fixe x , $T_x f : T_x M \rightarrow T_x M$ n'admet pas 1 comme valeur propre (ce qui est bien la version infinitésimale de « les points fixes de f sont isolés »). On dit que ces points fixes sont non dégénérés. Ils forment alors une sous-variété compacte de dimension zéro, donc un ensemble fini. La contribution d'un tel point fixe au nombre d'intersection $\#(\Gamma_f, \Delta)$ est égale au signe de $\det(T_x f - \text{Id}) \in \{\pm 1\}$. En effet, il est positif si et seulement si, pour toute base directe (v_1, \dots, v_n) de $T_x M$, la base $((v_1, v_1), \dots, (v_n, v_n), (v_1, T_x f(v_1)), \dots, (v_n, T_x f(v_n)))$ de $T_{(x,x)} M$ est positive. En recombinaison les vecteurs de cette base sans changer l'orientation on arrive à la base $((v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, (T_x f - \text{Id})(v_1)), \dots, (0, (T_x f - \text{Id})(v_n)))$ qui est positive si et seulement si $T_x f - \text{Id}$ préserve l'orientation.

On appelle indice du point fixe x de f et on note $\text{ind}_x(f)$ ce nombre d'intersection local en x .

Comme toute sous-variété suffisamment C^1 -proche de Γ_f est encore le graphe d'une application de M dans M , le théorème de transversalité de Thom (théorème 4.9) montre que toute application f est limite (en topologie C^r pour tout r) d'applications dont les points fixes sont non dégénérés.

Théorème 10.9. *Soit M une variété orientée compacte sans bord. Soit f une application de M dans M et soit $\Gamma_f \subset M \times M$ son graphe.*

$$\#(\Gamma_f, \Delta) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^* : H^i(M) \rightarrow H^i(M))$$

En particulier, si les points fixes de f sont non dégénérés alors

$$\sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{ind}_x(f) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^* : H^i(M) \rightarrow H^i(M))$$

On note que le membre de droite ne dépend que de la classe d'homotopie de f . La caractérisation cohomologie de la caractéristique d'Euler correspond au cas particulier $f = \text{Id}_M$. Le résultat général ci-dessus, dont la démonstration est une variante facile de la démonstration dans le cas $f = \text{Id}_M$, est appelé théorème de point fixe de Lefschetz car il assure l'existence de points fixes dans de nombreuses situations. Par exemple, si f est homotope à l'identité, on obtient au moins un point fixe si $\chi(M)$ est non nul. Si en plus les points fixes de f sont non dégénérés (ce qui nécessite au pire de perturber un peu f) alors le théorème assure que f a au moins $|\chi(M)|$ points fixes. L'exemple des rotations du tore \mathbb{T}^n montre qu'on ne peut pas espérer de point fixe automatique si $\chi(M) = 0$.

A. Rappels de topologie

Dans ce cours il est commode de pas trop s'attacher à une distance sur un espace mais plutôt se concentrer sur ses ouverts. La définition suivante est plus générale que celle d'espace métrique mais surtout permet de se concentrer sur l'essentiel.

Définition A.1. *Un espace topologique est un ensemble X muni d'une collection de parties de X , appelées ouverts, vérifiant :*

- *Le vide et l'ensemble X sont des ouverts de X*
- *Toute réunion d'ouverts de X est ouverte*
- *Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts de X est ouverte.*

Les fermés de X sont, par définition, les complémentaires des ouverts. En particulier le vide, X , une intersection de fermés et une réunion finie de fermés sont fermés.

Un *voisinage* d'un point x dans X est un ensemble contenant un ouvert contenant x .

Définition A.2. *Un espace topologique X est séparé si, pour tous points x et y de X , il existe des ouverts disjoints U et V contenant x et y respectivement. Il est compact s'il est séparé et si tout recouvrement de X par des ouverts admet un sous-recouvrement fini (respectivement localement fini). Il est localement compact si tout point admet un voisinage compact. Il est σ -compact s'il est réunion dénombrable de compacts.*

La *topologie induite* par un espace topologique X sur une partie Y est la topologie dont les ouverts sont les intersections de Y et des ouverts de X . Si X et Y sont deux espaces topologiques, la topologie produit sur $X \times Y$ est la plus petite topologie contenant $U \times V$ pour tout ouvert U de X et V de Y .

À toute relation d'équivalence \sim sur un espace topologique est associée une *topologie quotient* sur X/\sim . En notant π la projection de X sur X/\sim , une partie U de X/\sim est déclarée ouverte si $\pi^{-1}(U)$ est ouverte. Il s'agit donc de la plus grande topologie pour laquelle π est continue. Il faut bien faire attention au fait que l'image d'un ouvert par π n'est pas forcément ouverte et que la séparation de X ne garantit pas celle du quotient.

Proposition A.3. *Un espace topologique X séparé, localement compact et σ -compact est métrisable : il existe une distance sur X définissant la topologie de X .*

Bien que la proposition ci-dessus garantisse que toutes les variétés sont métrisables, il est bien plus naturel de ne pas chercher à revenir explicitement à une distance, en particulier dans le cas des quotients.

B. Rappels de géométrie et calcul différentiel

B.1. Actions de groupe

Dans cette section, on rappelle le vocabulaire des actions de groupe. Une *action* (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble X est un morphisme de groupes ρ de G vers le groupe $\text{Bij}(X)$ des bijections de X . Lorsque cela ne crée pas d'ambiguïté, on note simplement gx l'image d'un élément x de X par $\rho(g)$ pour g dans G . Une *action à droite* de G sur X est un morphisme de groupes entre G et le groupe opposé à $\text{Bij}(X)$, ie. $\text{Bij}(X)$ muni de la loi de composition $f \cdot g = g \circ f$.

L'*orbite* d'une partie A de X sous l'action de G est l'ensemble $GA = \{ga ; g \in G, a \in A\}$. On note Gx l'orbite du singleton $\{x\}$. On dit que l'action de G est *transitive* si $Gx = X$ pour tout x dans X . Une action de groupe définit une relation d'équivalence sur X : deux points x et y sont équivalents s'il existe g dans G tel que $gx = y$, autrement dit, si y est dans l'orbite de x . Le quotient de X par cette relation d'équivalence est noté X/G . À tout point x est associé son *stabilisateur* sous l'action de G : $G_x = \{g \in G ; gx = x\}$, il s'agit d'un sous-groupe de G . On dit que l'action de G sur X est *libre* si tous les points de X ont un stabilisateur trivial (i.e. réduit à l'élément neutre de G).

Munis d'une partie de ce vocabulaire et de la connaissance de l'algèbre linéaire, on peut retrouver de façon concise le cadre naturel de la géométrie élémentaire, celle qui était peuplée de points et de vecteurs avant que tout soit transformé de force en vecteurs. Dans ce cours il est crucial de ne pas mélanger les points et les vecteurs car ce mélange n'est plus possible dans le contexte des variétés. Un *espace affine* est un ensemble \mathcal{E} muni d'un action libre et transitive d'un espace vectoriel E . On dit aussi que \mathcal{E} est un espace affine *dirigé* par E . L'action d'un vecteur u est notée $p \mapsto p + u$ et appelée translation par u . Étant donné deux points a et b de \mathcal{E} , on note $b - a$ (ou parfois \vec{ab}) l'unique élément u de E vérifiant $b = a + u$.

Par exemple, l'action par addition d'un espace vectoriel sur lui-même le dote canoniquement d'une structure d'espace affine. Cette construction revient essentiellement à oublier l'origine de l'espace vectoriel et à perdre l'addition et la multiplication par un scalaire tout en conservant la soustraction. Si φ est une application linéaire de E dans F alors, pour tout f dans F , $\varphi^{-1}(f)$ est un espace affine dirigé par $\ker \varphi$. Il s'agit naturellement d'un sous-espace affine de E vu comme espace affine dirigé par lui-même.

Certains espaces affines ne sont pas naturellement des sous-espaces d'un espace vectoriel. Par exemple, si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E alors l'ensemble des supplémentaires de F est naturellement un espace affine dirigé par l'espace vectoriel $L(E/F, F)$. Notons π la projection de E sur E/F . Si G est un supplémentaire de F et φ

est linéaire de E/F dans F alors $G + \varphi = \{v + \varphi(\pi(v)); v \in G\}$.

B.2. Formes quadratiques

Dans cette section on rappelle la classification des formes quadratiques sur les \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie (une classification qui a mystérieusement disparu des programmes des classes préparatoires en 2003).

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On note $B(E)$ l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur E . Chaque b dans B définit une application linéaire Φ_b de E dans son dual E^* définie par $\Phi_b(u)(v) = b(u, v)$. Par définition, le *noyau* de b est le noyau de Φ_b . La forme b dite *non-dégénérée* si son noyau est réduit à $\{0\}$. On se concentre maintenant sur le sous-espace $B_s(E)$ des formes bilinéaires symétriques. Une forme b dans $B_s(E)$ est dite *positive* (resp. *négative*) si $b(u, u) \geq 0$ (resp. $b(u, u) \leq 0$) pour tout u . Si de plus $b(u, u) = 0$ seulement pour $u = 0$ on dit que b est *définie positive* (resp. *définie négative*) L'*indice* de b , noté $\text{ind}(b)$, est la dimension maximale des sous-espaces sur lesquels b est définie négative. La *signature* de b est le couple d'entiers (p, q) où q est l'indice et p est la dimension maximale des sous-espaces sur lesquels b est définie positive. On montre que $p + q + \dim \ker b = \dim E$.

Une *forme quadratique* sur E est une application $Q: E \rightarrow \mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme $Q(u) = b(u, u)$ pour $b \in B(E)$. La formule de polarisation

$$b(u, v) = \frac{1}{2} (b(u + v, u + v) - b(u, u) - b(v, v))$$

(qu'on peut vérifier simplement en utilisant la bilinéarité et la symétrie de b) montre que b est uniquement déterminée par Q . En particulier on peut attacher tout le vocabulaire du paragraphe précédant à Q (noyau, non-dégénérée, indice, signature).

Le groupe $\text{GL}(E)$ des applications linéaires inversibles de E agit à droite sur $B(E)$ par la formule $g \cdot b(u, v) = b(g(u), g(v))$. Le *théorème d'inertie de Sylvester* affirme que les orbites de cette action sont caractérisées entièrement par la dimension du noyau et l'indice : étant donné deux formes b et b' , il existe g telle que $g \cdot b = b'$ si et seulement si b et b' ont même dimension du noyau et même indice. Une autre façon de le dire est qu'elles sont caractérisées par la signature (p, q) . En particulier les orbites de formes quadratiques non-dégénérées sont caractérisées par l'indice.

B.3. Applications différentiables entre espaces affines

Le cadre des espaces affines réels est le bon cadre du calcul différentiel élémentaire. En effet on peut y écrire la définition de la différentiabilité d'un $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$:

$$f(x + h) = f(x) + Df(x)h + o(h)$$

en ayant la nature géométrique correcte de tous les éléments : x est un point de \mathcal{E} , h est un vecteur de E , $Df(x)h + o(h)$ est un vecteur de F , $Df(x)$ est linéaire de E dans F .

B.3. Applications différentiables entre espaces affines

On rappelle que le théorème majeur du calcul différentiel élémentaire est le *théorème d'inversion locale*. Si \mathcal{E} et \mathcal{F} sont des espaces affines réels normés complets (ce qui revient à dire qu'ils sont dirigés par des espaces de Banach) et si f est une application de classe C^1 de \mathcal{E} dans \mathcal{F} alors f est un difféomorphisme local autour d'un point p de \mathcal{E} dès que $Df(p)$ est un isomorphisme de E dans F .

Index

A

action, 121
à droite, 121
libre, 13, 121
propre, 13
transitive, 121
équivalence d'homotopie, 82
algèbre homologique, 80
antisymétrique, 59
application
différentiable, 11
lisse, 11
lisse à bord, 30
tangente, 20
atlas, 9
lisse, 10
orienté, 23

B

base d'un fibré, 17
bon recouvrement, 103
bord d'une variété, 30

C

caractéristique d'Euler, 42
carte, 9
de Morse, 47
champs de vecteurs, 21
changements de cartes, 10
classes de Thom, 113
cohomologie d'un complexe, 80
compact, 119
complexe de R -modules, 80
contractile, 83

D

degré, 42

d'une forme différentielle, 61
d'une forme multilinéaire, 59
difféomorphisme, 12
entre variétés à bord, 30
local, 12
différentielle d'une fonction, 22
dirigé, 121
données de recollement, 14
dual de Poincaré
d'une classe de cohomologie, 106
d'une sous-variété, 106

E

espace
affine, 121
tangente, 20
topologique, 119
total, 17

F

fibré, 17
cotangent, 22
des applications linéaires, 22
dual, 22
induit, 22
normal, 22
quotient, 22
restreint, 22
somme, 22
tangente, 20
tangente à bord, 30
trivial, 18
vectoriel, 18
fibration localement triviale, 18
fibre, 17
en un point, 18
flot d'un champ de vecteurs, 21

INDEX

- foncteur, 20
- fonction de Morse, 47
- forme bilinéaire
 - définie négative, 122
 - définie positive, 122
 - négative, 122
 - non-dégénérée, 122
 - positive, 122
- forme différentielle, 61
 - exacte, 79
 - fermée, 79
- forme quadratique, 122
- formule
 - de Leibniz graduée, 74
 - de point fixe de Lefschetz, 118
 - de Stokes, 75
- H**
- Hessienne, 46
- homotopie
 - entre applications continues, 28
 - entre morphismes de complexes, 81
- I**
- σ -compact, 119
- image réciproque
 - différentielle, 61
 - ponctuelle, 59
- immersion, 11
- indice
 - d'un point critique, 46
 - d'une forme quadratique, 122
- isomorphisme de fibrés, 18
- isotopie, 39
- L**
- lemme
 - de Morse, 47
 - du serpent, 92
- localement compact, 119
- M**
- morphisme
 - connectant, 92
 - de complexes, 80
- de fibrés, 18
- N**
- nombre
 - de Betti, 105
 - de Lebesgue, 104
- noyau d'une forme bilinéaire, 122
- O**
- orbite, 121
- orientable, 23
- P**
- plongement, 12
- produit
 - extérieur, 60, 61
 - intérieur, 60, 61
- Q**
- quotient par une action de groupe, 121
- R**
- rétraction, 83
 - par déformation, 83
- rang
 - d'un fibré vectoriel, 18
 - d'une application, 11
- relations de cocycle, 14
- ruban de Möbius, 19
- S**
- séparé, 119
- section, 18
- signature, 122
- sous-fibré, 22
- sous-variété, 10
- stabilisateur, 121
- submersion, 11
- suite exacte, 91
 - courte, 91
 - de complexes, 91
 - longue, 91
- support
 - d'une forme différentielle, 62
- surface de Heegaard, 55

T

théorème

de Sard, 35

de transversalité de Thom, 39

d'inertie de Sylvester, 122

d'inversion locale, 123

tiré en arrière

différentiel, 61

ponctuel, 59

topologie

algébrique, 79

induite, 119

quotient, 119

transversalité, 34

sous contrainte, 40

sous-variétés transversales, 34

trivialisation locale, 17

type fini, 103

U

universellement transversale, 40

V

valeur régulière, 35

variété

à bord, 30

différentiable, 10

instable, 51

orientée, 23

stable, 51

topologique, 9

voisinage, 119

collier, 30

tubulaire, 27