b

THESES

PRESENTEES

A L'UNIVERSITE PARIS VII

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Pierre PANSU

1ère thèse : QUASIISOMETRIES DES VARIETES A COURBURE NEGATIVE

2nde thèse : PROPOSITIONS DONNEES PAR L'UNIVERSITE.

Soutenues le 23 Juin 1987 devant la Commission d'Examen

MM. H. ROSENBERG Président
M. BERGER
A. CONNES
J. FERRAND Examinateurs
M. GROMOV
J. LE POTIER

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 3 : Cohomologie L^p

Appendice : Invariants conformes

Références

Figures

INTRODUCTION

1.1 Motivations.– L'objet de cette thèse est la recherche d'invariants globaux des variétés riemanniennes ouvertes non compactes. L'idée directrice, exprimée par M. Gromov dans [G5], est qu'il y a de riches familles d'exemples liées à la théorie des groupes (espaces homogènes, revêtements universels des variétés compactes). On pense que des données algébriques différentes devraient donner naissances à des propriétés géométriques différentes "à l'infini".

On a choisi de mesurer la façon dont diffèrent asymptotiquement au moyen des quasiisométries. Une application f entre espaces métriques est une *quasiisométrie* s'il existe des constantes L et C telles que l'image de f soit C-dense et que, pour tous $x \neq y$,

$$-C + \frac{1}{L}d(x,y) \leq d(fx,fy) \leq L\,d(x,y) + C.$$

Cette classe de transformations a été introduite par G.A. Margulis([Ma2]). La constante C est là pour souligner le fait qu'une quasiisométrie ignore les perturbations bornées des variétés, et qu'elle ne saisit que des propriétés asymptotiques. Par définition, les quasiisométries ne font pas de différence entre une variété riemannienne et les groupes qui agissent dessus avec un quotient compact. Par exemple, si $M = G/K$ est un espace symétrique riemannien, M, G et tous les sous-groupes cocompacts de G, connexes ou non, sont quasiisométriques. Aussi, si V est une variété compacte, le revêtement universel $\tilde{V}$ et le groupe fondamental $\pi_1(V)$ sont quasiisométriques. Par conséquent, tout invariant de quasiisométrie d'une classe de variétés ouvertes donne automatiquement naissance à un invariant homotopique d'une classe de variétés compactes (resp. un invariant algébrique d'une classe de groupes discrets).

1.2 Origine des idées présentées.–

Dans ce travail, on se concentre sur les variétés à courbure négative ou nulle, car, dans ce cas, on dispose d'un outil puissant : la sphère à l'infini. Comme le dit D. Sullivan, "la géométrie hyperbolique en dimension $n+1$ tend, quand on s'approche de l'infini, vers la géométrie conforme de la sphère S^n" ([Su] page 465). Classiquement, cela signifie que le groupe des isométries de l'espace hyperbolique H^{n+1} s'identifie au groupe conforme de la sphère S^n. Le point, crucial pour notre étude, est que, plus généralement, les quasiisométries de H^{n+1} s'identifient aux transformations quasiconformes de S^n. Ce résultat apparaît dans les travaux de V. Efremovitch et E. Tichonirova ([ET]).

C'est G.D. Mostow qui a découvert quel parti on pouvait tirer de ce phénomène. Dans [M1], il montre qu'une variété compacte de dimension ≥ 3 peut porter au plus une structure à courbure -1 (auparavant, on savait seulement qu'une métrique à courbure -1 n'avait pas de petites déformations). La méthode employée par G.D. Mostow est entièrement nouvelle. Le problème revient à montrer que, si un difféomorphisme f de H^{n+1} entrelace deux actions cocompactes, par isométries d'un groupe Γ, alors f peut être remplacée par une isométrie. Or f et les actions se prolongent à S^n. Là, les actions sont dynamiquement complexes (ergodicité sur le fibré tangent unitaire) ; il suffit que f admette en suffisament de points de S^n une différentielle inversible pour conclure que f est conforme, donc provient d'une isométrie de H^{n+1}.

L'enseignement que je tire du raisonnement de G.D. Mostow est que tout problème global concernant des quasiisométries de H^{n+1} se transforme en un problème local sur S^n, pour lequel les outils de l'analyse et de la géométrie différentielle sont disponibles.

Dans cette thèse, on développe trois idées.

La première trouve son origine dans les démonstrations de la propriété ACL pour les transformations quasiconformes (voir [Ge]) : on y prouve un peu de régularité par des manipulations de recouvrements en boules. C'est qu'il y a des invariants attachés à des familles de boules.

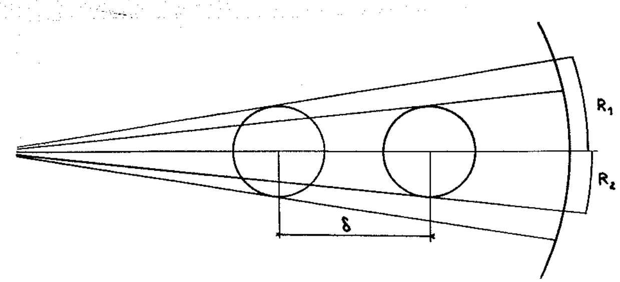
La seconde est que les transformations quasiconformes ont suffisamment de régularité pour qu'on puisse leur appliquer les outils de la géométrie différentielle. Une belle illustration de ce fait est donnée dans [BI].

La troisième est que, si les nombres λ_j désignent les exposants de croissance des champs de Jacobi, alors les rapports $\sum_j \lambda_j/\lambda_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, sont presque des invariants de quasiisométrie. En fait, c'est vrai dans les espaces homogènes à courbure négative. Pour étendre cette remarque à une classe plus large de variétés, on dispose d'un autre invariant, la cohomologie L^p.

1.3 Chapitre 1.– Par choix d'un point à l'infini, identifions la sphère à l'infini de H^{n+1} avec l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. Le boules euclidiennes de $\mathbf{R}^n$ sont les projections des boules hyperboliques de H^{n+1}, le fait que deux boules soient concentriques et le rapport de leurs rayons s'expriment en géométrie hyperbolique (voir figure 1).

Soit M une variété simplement connexe à courbure pincée $-a^2 \leq K \leq -b^2$. Par projection radiale des boules de M sur la sphère à l'infini ∂M, on obtient sur ∂M une classe de "boules", avec la notion de boules concentriques, et de rapport des rayons. J'appelle cette donnée une "structure quasiconforme", car elle suffit à définir les transformations quasiconformes.

Dans le premier chapitre, on montre que cette structure est indépendante des choix (page 17). Aussi, elle suffit à définir un *module grossier* pour les familles de courbes (page 22), qui dépend d'un paramètre réel p. Si p est trop grand, tous les modules sont nuls. Il y a donc un premier exposant où apparaissent des



$\frac{R_1}{R_2} = e^\delta$
Boules sur la sphère à l'infini
Figure 1

modules non nuls, on l'appelle la *dimension conforme* (page 26). Par construction, c'est un invariant de quasiisométrie des variétés à courbure strictement négative (page 32). On sait la calculer pour les espaces homogènes (page 26). Par exemple, pour l'espace hyperbolique complexe CH^m, la dimension de la sphère à l'infini est $n = 2m$. On sait l'estimer en fonction du pincement de la courbure (page 36) : elle est inférieure ou égale à $(n-1)a/b$. On en déduit par exemple le théorème 1 :

Un quotient compact de $\mathbf{C}H^m$, $m \geq 2$ *n'admet pas de métrique à courbure sectionnelle pincée entre* $-a^2$ *et* $-b^2$ *si* $b/a > 2m - 1/2m$. (Ce résultat n'est pas optimal, on sait que lorsque $m = 2$, il faut remplacer $2m - 1/2m$ par $1/4$, [Vi].)

La dimension conforme est un invariant nouveau même pour des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$. J'ai tenté d'en donner une application à un problème actuel sur les groupes quasiconformes (théorème 2 page 11), mais ce n'est pas très convaincant.

La donnée d'une structure quasiconforme permet aussi de définir l'énergie des fonctions et les capacités. Ainsi, toute une famille d'espaces fonctionnels Π^p est attachée à la sphère à l'infini. Dans le cas de $\partial H^{n+1} = \mathbf{R}^n$, Π^n est l'espace de Sobolev $W^{1,n}$, et les éléments de Π^p pour $p > n$ sont les fonctions à "oscillation p-uple bornée". Dans le cas des espaces homogènes à courbure négative, il y a plusieurs valeurs de p pour lesquelles Π^p change radicalement de nature, reflétant la filtration d'une algèbre de Lie nilpotente par les sous-algèbres engendrées par les espaces propres d'une dérivation (page 40).

1.4 Chapitre 2.– Afin d'étendre son théorème de rigidité aux espaces symétriques de rang un (espaces hyperboliques sur $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ et $\mathbf{Ca}$, G. D. Mostow a inventé la notion d'homéomorphisme $\mathbf{K}$-quasiconforme sur la sphère à l'infini. C'est M. Gromov ([G4]) qui m'a expliqué que la notion utilisée par G.D. Mostow se ramenait à la notion usuelle à condition de considérer sur ces sphères à l'infini des métriques de Carnot-Carathéodory.

Cela permet de donner aisément des exemples de transformations quasiconformes. Dans le cas de l'espace hyperbolique réel H^{n+1}, la sphère à l'infini est la sphère standard, et tout difféomorphisme de classe C^1 de S^n est quasiconforme, et détermine une quasiisométrie de H^{n+1} ([T2]).

Dans le cas de l'espace hyperbolique complexe $\mathbf{C}H^m$, la sphère à l'infini s'identifie à $S^{2m-1} \subset \mathbf{C}^m$, qui porte une structure de contact. Celle-ci est invariante par les isométries de $\mathbf{C}H^m$. A. Koranyi et H. Reimann ([KR1]) ont vérifié qu'un difféomorphisme de classe C^2 de S^{2m-1} est quasiconforme si et seulement si il préserve la structure de contact (en fait, C^1 suffit). Ceci fournit une vaste classe d'exemples, et autant de quasiisométries de $\mathbf{C}H^m$.

En revanche, pour les espaces hyperboliques quaternionien $\mathbf{H}H^m$, $m \geq 2$ et Cayley $\mathbf{Ca}H^2$ un difféomorphisme quasiconforme de S^{4m-1} (resp. S^{15}) devrait préserver un champ de plans de codimension 3 (resp. 7). Or la méthode d'équivalence d'E. Cartan montre que les automorphismes de classe C^3 de ce champ de plans forment le groupe de Lie $Sp(m,1)$ (resp. F_4^{-20}). C'est ce qui a conduit M. Gromov à conjecturer le résultat suivant (théorème 3) :

Toute quasiisométrie de l'espace hyperbolique quaternionien $\mathbf{H}H^m$, $m \geq 2$, (resp. du plan hyperbolique de Cayley $\mathbf{Ca}H^2$) est à distance bornée d'une isométrie, i.e., diffère d'une isométrie par une application qui déplace les points d'une distance bornée.

Ce résultat, bien que négatif, est frappant car il manifeste une rigidité plus marquée des espaces quaternioniens et Cayley, déjà suggérée par la propriété (T) de D. Kazhdan ([Z]).

La preuve consiste à traduire la propriété pour un difféomorphisme de préserver un champ de plan en des termes qui gardent un sens pour un homéomorphisme. C'est la notion de différentiabilité au sens de groupes de Carnot, introduite page 44 qui joue ce rôle. On démontre (théorème 5) une généralisation du théorème de Rademacher-Stepanov : les transformations quasiconformes sur un groupe de Carnot ont une différentielle presque partout. En dimension > 1, celle-ci est presque partout un automorphisme gradué du groupe (page 68). La rigidité des espaces hyperboliques quaternioniens et Cayley apparaît maintenant : leur sphère à l'infini s'identifie à un groupe de Carnot, dont les automorphismes gradués sont des similitudes. Une transformation quasiconforme d'un tel groupe est donc automatiquement conforme.

Le théorème de différentiabilité presque partout a plusieurs autres conséquences :

- classification (incomplète) des groupes nilpotents à quasiisométrie près (page 46),
- classification (complétée par U. Hamenstädt, [Ha]) des espaces homogènes à courbure négative à quasiisométrie près,
- existence de groupes résolubles dont toute quasiisométrie est une translation à gauche (page 42).

Ce dernier phénomène (dont une conséquence pour les feuilletages est décrite dans [PZ]) semble être “générique” pour les espaces homogènes à courbure négative. Le cas général - toujours ouvert - étant que les quasiisométries forment un groupe de Lie de dimension finie, avec pour seules exceptions les espaces hyperboliques réels et complexes.

1.5 Chapitre 3.–

Soit M une variété riemannienne de dimension n, k un entier compris entre 0 et n, p, q des réels supérieurs à 1. L'espace de *cohomologie* $H^k_{p,q}(M)$ est l'espace des classes de k-formes fermées α sur M telles que $|\alpha| \in L^p$ modulo les différentielles de $(k-1)$-formes β telles que $|\beta| \in L^q$.

Lorsque M est compacte, la cohomologie L^p coincide avec la cohomologie ordinaire. Lorsque M est non compacte, elle dépend en plus du comportement asymptotique de la métrique. On considère ici des variétés M simplement connexes à courbure négative ou nulle, donc contractiles, si bien que la topologie ne contribue pas et la cohomologie L^p a une signification purement géométrique. Dans ce cadre, on s'attend à ce que la cohomologie L^p soit invariante par quasiisométrie. C'est vrai en en degré 1 (page 117), mais ouvert en degré supérieur. Ainsi, les espaces de cohomologie L^p calculés ci-dessous donnent naissance à des invariants homotopiques des variétés compactes en degré 1, invariants Lipschitz en degré supérieur.

La littérature est riche de résultats relatifs aux formes harmoniques L^2, mais les seules références que je connaisse où la cohomologie soit calculée sont [D] pour l'espace hyperbolique réel, et [DF] pour l'espace hyperbolique réel (et plus généralement pour les domaines bornés strictement pseudoconvexes).

En revanche, je ne connais aucune référence relative aux $H^k_{p,q}$. On dispose pourtant de presque tous les outils de la cohomologie de de Rham (une exception notable étant le théorème de l'indice lorsque $p \neq 2$) :

- théorie de Hodge, voir paragraphe 23,
- cup-produit, paragraphe 22,
- intégration sur les cycles, page 118.

J'ai étudié le cas des variétés à courbure négative ou nulle, guidé par l'intuition suivante : plaçons nous en coordonnées polaires. Soit π la projection radiale sur la sphère unité tangente à l'origine S^{n-1}. Si ω_0 est une k-forme fermée sur S^{n-1}, alors $\omega = \pi^*\omega_0 \in L^p$ pour $p > q_{k+1}(M)$ où

$$q_k(M) = \sup_M \frac{\log J_n}{\log J_{k+1}}$$

et $J_k(x)$ est la norme de $\Lambda^k\pi_* : \Lambda^k T_x M \to \Lambda^k T_{\pi(x)} S^{n-1}$.

La quantité $q_k(M)$ s'estime en fonction du pincement de la courbure, ou se calcule explicitement en fonction des racines dans les espaces homogènes ou symétriques. Si $\omega_0 = d\beta_0$, on a $\omega = d\beta$ où $\beta = \pi^*\beta_0 \in L^q$ pour $q > q_k(M)$. On s'attend à des résultats du type

$$H^k_{p,q}(M) \neq 0 \text{ pour } p > q_{k+1}(M) \text{ et } q < q_k(M),$$

et, au moins lorsque $p = q$,

$$H^k_{p,p}(M) = 0 \text{ pour } p < q_{k+1}.$$

C'est ce qu'on obtient effectivement dans les cas suivants :

- Pour tout k, en courbure constante (page 106) ;
- Lorsque $k = 1$, pour la plupart des espaces homogènes à courbure strictement négative et quelques espaces symétriques (page 116);
- Lorsque $k = \dim M$ (page 100).

Dans les autres cas, on sait seulement montrer que $H^k_{p,p}(M) = 0$ pour $p < p_k(M)$ où

$$p_k(M) = \inf_M \frac{\log J^n}{\log J^k}$$

et $J^k(x)$ est la norme de $\Lambda^k\pi^* : \Lambda^k T^*_{\pi(x)}S^{n-1} \to \Lambda^k T^*_x M$, (théorème 7). On montre que $H^k_{p,q}(M) \neq 0$ pour $p > q_{k+1}$ et $q < r_k(M)$ où

$$\frac{1}{r_k(M)} + \frac{1}{q_{n-k+1}(M)} = 1.$$

Cette borne r_k est particulièrement mauvaise dans le cas général, et on sait l'améliorer dans des cas particuliers (pages 107 et 118).

En degré 1, on on arrive à une bonne compréhension de ce qui se passe entre les bornes $p_1(M)$ et $q_1(M)$ On décrit un invariant plus fin (page 108 : c'est un faisceau concentré sur la sphère à l'infini, dont $H^1_{p,p}(M)$ représente les sections globales. On obtient une image précise dans le cas des espaces homogènes à courbure négative (page 116) : pour $p \leq p_1(M)$, le faisceau est nul ; pour $p_1(M) < p \leq q_1(M)$, le faisceau est non nul mais n'a pas de sections globales ; pour $p > q_1(M)$, la cohomologie est non nulle et s'identifie à un un espace de Besov généralisé sur la sphère à l'infini (paragraphe 27) ; enfin, $r_1(M) = +\infty$.

En étudiant la cohomologie L^p, je poursuis deux buts. Le premier est d'obtenir un invariant de quasiisométrie pour les variétés à courbure négative pincée qui dépende du pncement de manière plus fine que la dimension conforme, par exemple, en vue d'améliorer le théorème 1 cité plus haut. Les résultat obtenus en degré 1 permettent de retrouver ce théorème, sans plus.

L'autre but est de pallier le fait que, pour les espaces symétriques de rang supérieur, on manque d'une construction "quasiisométrique" de la frontière maximale, qui doit remplacer la sphère à l'infini. On espère trouver un espace de

cohomologie qui s'identifierait à une algèbre de fonctions sur la frontière maximale. En rang 1, ça marche : l'espace $H^1_{p,p}(M)$ s'identifie à un espace de Besov sur la sphère à l'infini. On peut espérer attacher à chaque classe de cohomologie de degré égal au rang une fonction sur la frontière maximale : c'est son intégrale sur les plats, voir page 118.

1.6 Appendice.– En utilisant une distance conforme, on montre que, très souvent, les transformations quasiconformes sont des quasiisométries, et donc que les résultats ci-dessus s'étendent à cette classe.

On explique ensuite les liens entre l'espace de cohomologie $H^1_{n,q}$ et deux notions apparues en géométrie conforme : la condition P1 de J. Väisälä et une autre distance conforme étudiée par J. Ferrand.

1.7 Conclusion.– Cette thèse introduit des outils adhoc pour l'étude des espaces homogènes à courbure négative. Il y a un espoir que les outils du troisième chapitre s'appliquent aussi en courbure négative ou nulle. En revanche, les autres exemples connus de variétés à courbure négative, voir [GTh], semblent réfractaires aux méthodes exposées. Enfin, M. Gromov a construit une théorie des "groupes hyperboliques", une vaste classe de groupes (elle contient "presque tout" groupe de présentation finie) qui partagent les propriétés connues des groupes fondamentaux des variétés à courbure négative ([G7]). Les invariants que j'ai construits sont probablement triviaux pour la plupart de ces groupes.

Chapter 3

COHOMOLOGIE L^p

Soit M une variété riemannienne de dimension n, k un entier compris entre 0 et n, p, q des réels supérieurs à 1. L'espace de *cohomologie* $H^k_{p,q}(M)$ est l'espace des classes de k-formes fermées α sur M telles que $|\alpha| \in L^p$ modulo les différentielles de $(k-1)$-formes β telles que $|\beta| \in L^q$.

On se pose le problème général suivant : pour quelles valeurs de k, p, q cet espace est-il nul ? Lorsqu'il est non nul, le décrire.

L'intérêt de la cohomologie L^p, c'est son invariance bilipschitzienne : s'il existe un difféomorphisme $f : M \to N$ tel que, pour tout vecteur $X \in TM$,

$$\text{const.}^{-1}|X| \leq |f_*X| \leq \text{const. } |X|,$$

alors $H^k_{p,q}(M)$ est isomorphe à $H^k_{p,q}(N)$ pour tous p, q et k. Par exemple, si V est une variété compacte, alors les espaces $H^k_{p,q}(\tilde{V})$ sont des invariants différentiables de V. On verra d'ailleurs (théorème 9) que $H^1_{p,q}(M)$ est plus généralement invariant sous quasiisométrie, donc on obtient des invariants homotopiques des variétés compactes.

Dans ce chapitre, on étudie la cohomologie L^p de trois familles d'exemples :
- les variétés à courbure négative pincée,
- les espaces homogènes à courbure strictement négative,
- les espaces symétriques.

Les paragraphes 22 et 23 contiennent un résultat général qui prend, dans chacune des classes d'exemples ci-dessus la forme suivante : l'espace de cohomologie $H^k_{p,p}(M)$ s'annulle pour $p \leq p_k(M)$, et ne s'annulle pas pour $q_k(M) < p < r_k(M)$. Les quantités p_k, q_k et r_k font intervenir les taux de croissance exponentielle des champs de Jacobi. Noter que, dans le cas symétrique, il semble que la cohomologie soit toujours nulle pour k inférieur au rang, mais je ne sais pas le montrer.

La non-nullité s'obtient en considérant des formes qui, en coordonnées polaires, ne dépendent pas de r, et en utilisant judicieusement le cup-produit. Pour la nullité, on utilise la théorie de Hodge : une identité (23.6) analogue à la propriété de monotonie des surfaces minimales permet de prouver que, pour $p < p_{k-1}(M)$, chaque classe de cohomologie contient une forme p-harmonique et pour $p \leq p_k(M)$, il n'y a pas de formes p-harmoniques.

Malheureusement, sauf en courbure constante -1, le résultat général semble loin d'être optimal pour $1 < k < n$ (on trouve souvent $p_k(M) \leq 1$ ou $q_k(M) = +\infty$). Il l'est pourtant lorsque $k = 1$. En degré 1, on arrive à une bonne compréhension de ce qui se passe entre les bornes $p_1(M)$ et $q_1(M)$ On

décrit un invariant de quasiisométrie plus fin (paragraphe 24 : c'est un faisceau concentré sur la sphère à l'infini, dont $H^1_{p,p}(M)$ représente les sections globales. Ce faisceau peut être non nul pour certains $p < q_1(M)$. On peut l'interpréter comme un espace de Besov généralisé (paragraphe 27), et montrer ainsi qu'il n'a pas de sections globales. Autrement dit, on obtient une image précise dans le cas des espaces homogènes à courbure négative (Corollaire 27.6) : pour $p \leq p_1(M)$, le faisceau est nul ; pour $p_1(M) < p \leq q_1(M)$, le faisceau est non nul mais n'a pas de sections globales ; pour $p > q_1(M)$, la cohomologie est non nulle ; enfin, $r_1(M) = +\infty$.

22 CRITÈRE GÉNÉRAL DE NON-NULLITÉ

22.1 Cup-produit.– Clairement, si β est une k-forme fermée dans L^p et β' une k'-forme fermée dans $L^{p'}$, alors $\beta \wedge \beta'$ est une $k+k'$-forme dans L^r où

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}.$$

Si $\beta = d\gamma$ où $\gamma \in L^q$, alors $\beta \wedge \beta' = d(\gamma \wedge \beta')$, et $\gamma \wedge \beta' \in L^s$ où

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p'}.$$

En particulier, si

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{p},$$

alors on a un *cup-produit* bien défini

$$\smile : H^k_{p,q}(M) \otimes H^{k'}_{p',q'}(M) \to H^{k+k'}_{r,s}(M).$$

22.2 LEMME .– *L'intégration des formes L^1 de degré maximum $n = \dim M$ définit un homomorphisme $\int : H^n_{1,1}(M) \to \mathbf{R}$.*

Fixons une origine $x \in M$. D'après la formule de Stokes, pour toute $(n-1)$-forme β telle que $d\beta \in L^1$,

$$\int_{\partial B(x,R)} |\beta| \geq \int_{\partial B(x,R)} \beta = \int_{B(x,r)} d\beta$$

qui tend vers $\int_M d\beta$. Par conséquent, si $\beta \in L^1$, $\int_M d\beta = 0$. ∎

22.3 Des exemples où $H^k_{p,q}(M) \neq 0$.– Soit M une variété à courbure négative ou nulle. *Notons* $\pi : M \setminus \{x\} \to S^{n-1}$ la projection radiale sur la sphère unité tangente en x. Soient ω_0, γ_0 des formes différentielles lisses sur S^{n-1}, de degré $k-1$ et $n-k-1$, telles que

$$\int_{S^{n-1}} d\omega_0 \wedge \gamma_0 \neq 0.$$

Soit ω (resp. γ) une $(k-1)$-forme lisse sur M qui coincide avec $\pi^*\omega_0$ (resp. $\pi^*\gamma_0$) en dehors d'un voisinage de x. Posons $\beta = d\omega$. Alors

$$\beta \wedge d\gamma = \pi^*(d\omega_0 \wedge d\gamma) = 0$$

en dehors d'un voisinage de x, donc $\beta \wedge d\gamma \in L^1$, et

$$\int_M \beta \wedge d\gamma = \int_{S^{n-1}} d\omega_0 \wedge \gamma_0 \neq 0.$$

Si $\omega \in L^p$ et $d\gamma \in L^{p'}$, choisissons q et q' tels que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{s} = 1.$$

(On n'a pas de contrainte sur $1/p + 1/p'$ puisque $\beta \wedge d\gamma$ est à support compact). On conclut que

$$[\beta] \smile [d\gamma] \neq 0 \text{ dans } H^n_{1,1}(M),$$

d'où

$$[\beta] \neq 0 \text{ dans } H^k_{p,p'/p'-1}(M) \quad \text{et} \quad [d\gamma] \neq 0 \text{ dans } H^{n-k}_{p',p/p-1}(M).$$

22.4 Cas où la courbure est pincée négativement.– Supposons la courbure sectionnelle pincée, $-a^2 \leq K \leq -b^2$. On a $\beta \in L^p$ pour tout $p > (n-1)a/kb$, (resp. $d\gamma \in L^{p'}$ pour tout $p' > (n-1)a/(n-k)b$). On conclut que, *pour tout* $k \geq 1$,

$$H^k_{p,q}(M) \neq 0 \quad \text{si} \quad p > \frac{(n-1)a}{kb} \text{ et } q < \frac{(n-1)a}{(n-1)a - (n-k)b}.$$

En particulier, on peut trouver quelques valeurs de p pour lesquelles $H^k_{p,p}(M) \neq 0$, mais seulement si la pincement b/a est assez proche de 1.

22.5 Cas des espaces symétriques.– Dans un espace symétrique, les champs de Jacobi sont connus explicitement. En effet, fixons une origine x et un vecteur tangent X. Ces choix déterminent une décomposition $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ de l'algèbre de Lie du groupe d'isométries, et un sous espace abélien maximal A de $\mathcal{M}$, contenant X. L'action adjointe de A sur $\mathcal{G}$ se décompose en espaces propres

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda,$$

où $\Lambda \subset A^*$ est l'ensemble fini des racines de l'espace symétrique G/K. Posons

$$\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M} \cap (\mathcal{G}_\lambda \oplus \mathcal{G}_{-\lambda}).$$

Alors, pour $Z \in A$, $ad(Z)^2 = \lambda(Z)^2$ sur $\mathcal{M}_\lambda$. On *note* Λ^+ un ensemble qui contient une racine de chaque paire $(\lambda, -\lambda)$, répétée autant de fois que $\dim \mathcal{M}_\lambda$. En particulier, 0 apparaît r fois dans Λ.

Soit Y_λ, $\lambda \in \Lambda^+$, une base de $\mathcal{M}$ adaptée à la décomposition $\mathcal{M} = \bigoplus_\lambda \mathcal{M}_\lambda$. Prolongeons chaque Y_λ en un champ parallèle le long de la géodésique $\exp(tX).x$. Comme la courbure sectionnelle du plan (X, Y_λ) vaut $-\lambda(X)^2$, les champs

$$\cosh|\lambda(X)|t\, Y_\lambda, \quad \sinh|\lambda(X)|t\, Y_\lambda,$$

(où cosh, sinh sont remplacés par $1, t$ lorsque $\lambda = 0$) forment une base de champs de Jacobi le long de la géodésique $\exp(tX).x$. Par conséquent, la métrique de M s'écrit, en coordonnées polaires,

$$g = dt^2 \oplus g_t = dt^2 \oplus \bigoplus_{\lambda \in \Lambda^+, \lambda \neq 0} \left(\frac{\sinh|\lambda|(X)t}{|\lambda|(X)}\right)^2 g_0|_{\mathcal{M}_\lambda} \oplus t^2 g_0|_{A \cap X^\perp}.$$

Si une k-forme différentielle ξ sur $M = \mathbf{R}_+ \times S^{n-1}$ ne dépend pas de t, on voit que, si $k \geq r = \mathrm{rang}(M)$,

$$|\xi| \leq \text{const. } t^{r-1} \prod_{\lambda \in D} \frac{\sinh|\lambda|(X)t}{|\lambda|(X)}$$

où $D \subset \Lambda^+$ contient les $k - r + 1$ racines non nulles qui minimisent $|\lambda(X)|$. Remplaçant D par $B = D \cup r\{0\}$, la racine 0 répétée r fois, on voit que $\xi \in L^p$ dès que, pour tout $X \in supp(\xi)$,

$$\frac{e_n(X)}{e_{k+1}(X)} < p,$$

où

$$e_k(X) = \min_{B \subset \Lambda^+, \#B = k} \sum_{\lambda \in B} |\lambda(X)|.$$

Si, dans la construction 22.3, on choisit des formes ω_0 et γ_0 sur S^{n-1} dont le support est concentré autour d'un point X, on conclut que, pour tout $X \in S^{n-1}$,

$$H^k_{p,q}(M) \neq 0 \quad \text{pour tout } p > \frac{e_n}{e_{k+1}}(X) \quad \text{et } q < \frac{e_n}{e_n - e_{n-k+1}}(X).$$

Remarquer, que, sauf en courbure constante -1, ou si $k = 1$ou n, $e_n(X) \geq e_{k+1}(X) + e_{n-k+1}(X)$, donc cette méthode ne suffit pas pour obtenir des $H^k_{p,p}(M)$ non nuls pour $1 < k < n$. On tâchera d'y remédier dans des cas particulier au paragraphe 29.

22.6 Exemples.– Lorsque M est l'espace hyperbolique $\mathbf{K}H^m$ sur le corps $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ ou $\mathbf{Ca}$, on a $e_k = k-1$ si $k \leq n - \dim \mathbf{K} + 1$, $e_k = 2k - n + \dim \mathbf{K} - 2$ sinon.

Lorsque $M = H^m \times \mathbf{R}^{r-1}$, et X s'écrit

$$X = \cos\theta a + \sin\theta b$$

où $a \in TH^m$ et $b \in T\mathbf{R}^{r-1}$, on a $e_k(X) = (k-r)|\cos\theta|$.

Plus généralement, si M est un produit $M_1 \times M_2$ d'espaces symétriques (avec M_1 ou M_2 non euclidien), et si

$$X = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$$

alors

$$e_k(X) = \min_{k_1+k_2=k,\, k_i \leq n_i} |\cos\theta| h_1^{k_1}(X_1) + |\sin\theta| h_2^{k_2}(X_2).$$

Enfin, traitons approximativement le cas de $M = Sl(r+1, \mathbf{R})/SO(r+1)$. L'espace tangent M s'identifie aux matrices symétriques à trace nulle, A aux matrices diagonales à trace nulle, les racines non nulles sont les

$$diag\{a_1, \ldots, a_{r+1}\} \mapsto a_i - a_j, \qquad i > j.$$

Choisissons $X = diag\{i - 1 - \frac{r}{2}\}$. Alors, pour toute racine non nulle λ, $|\lambda(X)| = 1$, d'où $e_k(X) \geq h$, alors que

$$e_n(X) = \sum_{i>j} |a_i - a_j| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r+1}(2i - r - 2)^2$$

est un polynome de degré 3 en r.

22.7 Espaces homogènes a courbure négative.– Ils sont justiciables du même traitement que les espaces symétriques.

D'après E. Heintze [H], tout espace homogène à courbure sectionnelle strictement négative est une métrique invariante sur un groupe de Lie résoluble, produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent N par $\mathbf{R}$, où $\mathbf{R}$ agit par une dérivation α dont les valeurs propres ont des parties réelles λ_i positives.

Les orbites du sous-groupe nilpotent N sont des horosphères parallèles. Si α est semi-simple, les champs de Jacobi le long des géodésiques normales à ces horosphères se comportent comme dans le cas symétrique : il y a une base de champs de Jacobi de la forme $e^{t\lambda_i}Y_i$ où Y_i est parallèle. Par conséquent, on a

$$H^k_{p,q}(M) \neq 0 \text{ pour tout } p > \frac{e_n}{e_{k+1}} \quad \text{et } q < \frac{e_n}{e_n - e_{n-k+1}},$$

où $e_k = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}$ est la somme des $k-1$ plus petites parties rélles de valeurs propres de α.

Dans l'énoncé 22.4, ce qui limite l'intervalle autorisé pour q, c'est le fait que $s = 1$ dans 22.2, i.e., bien que la n-forme $\beta \wedge d\gamma$ soit dans L^p pour tout p, elle ne donne lieu à une classe de cohomologie non nulle que dans $H^n_{1,1}$. En effet,

22.8 PROPOSITION .– *Soit M une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle, et telle que $div(\frac{\partial}{\partial r}) \geq h > 0$. Alors $H^n_{p,q}(M) = 0$ pour tout $q > p \geq 1$, $n = \dim M$.*

Une forme L^p de degré maximum s'écrit $\omega = f\, vol$ où $f \in L^p$. Soit u une fonction lisse sur M. Plaçons nous en coordonnées polaires, et considérons la forme

$$\beta = u\, i_{\frac{\partial}{\partial r}} vol = u(r,\theta)\Theta(r,\theta)\, d\theta.$$

Alors $d\beta = \omega$ si et seulement si

$$\frac{\partial}{\partial r}(u\,\Theta) = f\,\Theta.$$

Avec la condition initiale $u\,\Theta(0) = 0$, on trouve une solution unique

$$u(r,\theta) = \Theta(r,\theta)^{-1}\int_0^r \Theta(s,\theta) f(s,\theta)\, ds.$$

De l'hypothèse $h > 0$ on tire, pour tout $p > 1$, r et θ,

$$\int_r^{+\infty} \Theta(r)^{1/1-p}\, dr \leq \text{ const. } \Theta(r)^{1/1-p}. \tag{22.8}$$

d'où

$$|u|^p\Theta(r,\theta) \leq \text{ const. } \int_0^r |f|^p \Theta(s,\theta)\, ds,$$

donc la fonction $u^p\Theta$ est bornée. Comme Θ croît au moins comme une exponentielle, on conclut que

$$u^{p'}\Theta = (u^p\Theta)^{p'/p}\Theta^{1-p'/p} \in L^1$$

pour tout $p' > p$. ∎

23 Théorie de Hodge

Soit M une variété riemannienne. *Notons* $\Omega_p^k(M)$ la complétion de l'espace des k-formes C^∞ à support compact pour la norme $\| \omega \|_p + \| d\omega \|_p$. La différentielle extérieure d s'étend à $\Omega_p^*(M)$ en un complexe dont la cohomologie, par définition, est $H_{p,p}^*(M)$. On est tenté de représenter les classes de cohomologie par des *formes p-harmoniques* : en effet, l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle $\omega \mapsto \| \omega \|_p^p$ relative aux variations à support compact est

$$d(*|\omega|^{p-2}\omega) = 0,$$

où $*$ désigne l'opérateur de Hodge. Inversement, si $\omega \in \Omega_p^k$ satisfait $d(*|\omega|^{p-2}\omega) = 0$, alors

$$\| \omega \|_p \leq \| \omega + d\beta \|_p$$

pour tout $\beta \in \Omega_p^{k-1}$. On dira que ω est *p-cofermée* si $d\omega^* = 0$, *p-harmonique* si de plus $d\omega = 0$.

Notons $\mathcal{H}_p^k(M)$ l'ensemble des k-formes p-harmoniques sur M (ce n'est pas un espace vectoriel). On a une dualité entre $\mathcal{H}_p^k(M)$ et $\mathcal{H}_q^{n-k}(M)$, où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

donnée par

$$\omega \mapsto \omega^* = *|\omega|^{p-2}\omega.$$

En effet, $|\omega^*|^q = |\omega|^p$, ω^* est fermée par définition, et $(\omega^*)^* = \pm\omega$.

23.1 Monotonie.– En utilisant une idée venue de la théorie des surfaces minimales, on va donner un critère de non-existence de formes p-harmoniques. La propriété de *monotonie*, pour une sous-variété minimale S dans $\mathbf{R}^n$ de dimension k, consiste à dire que, pour $x \in S$,

$$r^{-k} vol_k(S \cap B(x,r))$$

est une fonction croissante de r. Elle se démontre en écrivant que la variation première de l'aire lorsqu'on pousse S par un champ de vecteurs de la forme $Z = \phi(r)\frac{\partial}{\partial r}$ est nulle.

Soit M une variété à courbure négative ou nulle, (r,θ) des coordonnées polaires, ϕ une fonction lisse à support compact dans $]0,+\infty[$. Soit $Z = \phi(r)\frac{\partial}{\partial r}$, notons f_t son flot. Soit $\omega \in \mathcal{H}_p^k(M)$ une k-forme p-harmonique. Comme f_t est l'identité en dehors d'un compact, $f_t^*\omega - \omega$ est la différentielle d'une forme à support compact. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial t} \| f_t^*\omega \|_p^p |_{t=0} = 0,$$

autrement dit,

$$\int_M |\omega|^{p-2} \langle \mathcal{L}_Z\omega, \omega \rangle = 0.$$

On calcule

$$\mathcal{L}_Z\omega = \phi'(r)\, dr \wedge i_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega + \phi(r)\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega,$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_Z\omega, \omega \rangle &= \phi'(r)|i_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega|^2 + \phi(r)\langle \mathcal{L}_Z\omega, \omega \rangle \\ &= \phi'(r)|i_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega|^2 + \frac{1}{2}\phi(r)\Big(\frac{\partial}{\partial r}[V|\omega|^2\Big) + \phi(r)\langle \mathcal{A}_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega, \omega \rangle,\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}_{\frac{\partial}{\partial r}} = \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial r}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}$ (dérivée de Lie et dérivée covariante) est un opérateur d'ordre zéro sur les formes. Notons $S(r)$ la sphère de rayon r. Il vient

$$\int_O^{+\infty} \phi'(r)\Big(\int_{S(r)} |\omega|^{p-2}|i_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega|^2\Big) + \phi(r)\Big(\int_{S(r)} \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial r}|\omega|^p + |\omega|^{p-2}\langle \mathcal{A}_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega, \omega \rangle\Big)\, dr = 0.$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction ϕ à support compact, on conclut que

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(\int_{S(r)} |\omega|^{p-2}|i_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega|^2\Big) = \int_{S(r)} \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial r}|\omega|^p + |\omega|^{p-2}\langle \mathcal{A}_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega, \omega \rangle.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{S(r)} |\omega|^p = \int_{S(r)} \frac{p}{2}|\omega|^{p-2}\frac{\partial}{\partial r}|\omega|^2 + |\omega|^p h$$

où $h = \Theta'/\Theta$. En combinant les deux dernières identités, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_{S(r)} |\omega|^{p-2}(p|i_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega|^2 - |\omega|^2) = \int_{S(r)} \frac{p}{2}|\omega|^{p-2}\langle \mathcal{A}_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega, \omega \rangle - |\omega|^p h.$$

Si $\omega \in L^p$, il existe des valeurs arbitrairement grandes de r telles que

$$\int_{S(r)} |\omega|^{p-2}(p|i_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega|^2 - |\omega|^2)$$

tende vers 0, et on conclut que

$$\int_M |\omega|^{p-2}\Big(\frac{h}{p}|\omega|^2 - \langle \mathcal{A}_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega, \omega \rangle = 0.$$

D'où la

23.2 PROPOSITION .– *Soit M une variété simplement connexe à courbure négative ou nulle. Soit $\frac{\partial}{\partial r}$ le gradient de la distance à un point. Pour toute k-forme p-harmonique ω, on a*

$$\int_M |\omega|^{p-2}\left(\frac{h}{p}|\omega|^2 - \langle \mathcal{A}_{\frac{\partial}{\partial r}}\omega,\omega\rangle\right) = 0.$$

23.3 COROLLAIRE .– *Soit M une variété simplement connexe à courbure négative ou nulle. Si, en coordonnées polaires, on a toujours*

$$|\mathcal{A}_{\frac{\partial}{\partial r}}|_{\Lambda^k T^*}| \leq \frac{h}{p},$$

alors $\mathcal{H}_p^k(M) = 0$, i.e., il n'y a pas de k-formes p-harmoniques.

23.4 Remarque.– L'absence de k-formes p-harmoniques ne suffit pas, en général, pour conclure que l'espace de cohomologie $H^k_{p,p}(M)$ s'annule La condition supplémentaire est la suivante :

23.5 LEMME .– *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
- *chaque forme dans $\Omega_p^k(M)$ est cohomologue à une forme p-cofermée ;*
- *l'image $d(\Omega_p^{k-1}(M))$ est fermée dans $\Omega_p^k(M)$.*

Si $d(\Omega_p^{k-1}(M))$ est fermé, toute forme $\omega \in \Omega_p^k(M)$ a une unique projection $d\beta$ (par uniforme convexité de la norme L^p), et alors $\omega - d\beta$ est p-cofermée. Inversement, soit $L = \mathcal{H}_p^k(M)^\perp$ l'ensemble des formes $\gamma \in \Omega_p^k(M)$ telles que, pour tout $\omega \in \mathcal{H}_p^k(M)$,

$$\int_M \gamma \wedge \omega^* = 0.$$

Alors L est fermé, contient $d(\Omega_p^{k-1}(M))$. Soit $\gamma \in L$. S'il existe une forme p-cofermée ω cohomologue à γ, i.e., $\gamma = \omega + d\beta$, alors

$$0 = \int_M \gamma \wedge \omega^* = \int_M \omega \wedge \omega^* = \| \omega \|_p^p$$

d'où $\gamma = d\beta$. Par conséquent, sous la première condition, $d(\Omega_p^{k-1}(M)) = L$ est fermé. ∎

On en vient enfin au fait : on va donner une inégalité qui généralise à la fois l'inégalité de Sobolev (24.1) (aux formes de degré supérieur), la proposition 23.2 (aux formes non p-harmoniques) et un résultat de H. Donnelly et F. Xavier [DX] (aux exposants $p \neq 2$).

23.6 LEMME .– *Soit Z un champ de vecteurs et ω une k-forme sur M. On a*

$$d\left((i_Z\omega)\wedge\omega^* - \frac{1}{p}i_Z(\omega\wedge\omega^*)\right)$$
$$= (i_Z\omega)\wedge d\omega^* - (i_Z d\omega)\wedge\omega^* - \left(\frac{1}{p}\mathrm{div}(Z)\omega - \mathcal{A}_Z(\omega)\right)\wedge\omega^*,$$

où $\mathcal{A}_Z$ désigne l'opérateur d'ordre zéro $\mathcal{L}_Z - \nabla_Z$ (dérivée de Lie et dérivée covariante).

En effet, calculons

$$\begin{aligned} d\left((i_Z\omega)\wedge\omega^* + (i_Z d\omega)\wedge\omega^*\right) &= (i_Z\omega)\wedge d\omega^* + (d(i_Z\omega) + i_Z d\omega)\wedge\omega^* \\ &= (i_Z\omega)\wedge d\omega^* + \langle \mathcal{L}_Z\omega,\omega\rangle * |\omega|^{p-2}, \end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned} d(i_Z(\omega\wedge\omega^*)) &= \mathcal{L}_Z(|\omega|^p * 1) \\ &= (\mathcal{L}_Z|\omega|^p) * 1 + \mathrm{div}(Z) * |\omega|^p \\ &= p\langle\nabla_Z\omega,\omega\rangle * |\omega|^{p-2} + \mathrm{div}(Z) * |\omega|^p. \end{aligned}$$

En retranchant les deux équations, on fait apparaître le terme

$$\mathcal{A}_Z(\omega) = \mathcal{L}_Z\omega - \nabla_Z\omega. \;\blacksquare$$

23.7 PROPOSITION .– *Soit Z un champ de vecteurs borné sur M. Notons $E_k(Z)(x)$ la somme des k plus grandes valeurs propres de l'opérateur $-\nabla Z$ sur T_xM. Alors, pour tout $\omega \in \Omega_p^k(M)$, on a*

$$\int_M \left(\frac{1}{p}E_{n-1} - E_k\right)(Z)|\omega|^p \leq \| \omega \|_p \| d\omega^* \|_{p/p-1} + \| \omega \|_p^{p-1} \| d\omega \|_p \,.$$

En effet, si $Z \in L^\infty$ et $\omega \in L^p$, on a $(i_Z\omega)\wedge\omega^* - i_Z(\omega\wedge\omega^*)/p \in L^1$, donc l'intégrale de cette $n-1$-forme sur une grande sphère tend vers 0, et il vient

$$\int_M (i_Z\omega)\wedge d\omega^* - (i_Z d\omega)\wedge\omega^* - \left(\frac{1}{p}\mathrm{div}(Z)\omega - \mathcal{A}_Z(\omega)\right)\wedge\omega^* = 0.$$

Il reste à appliquer l'inégalité de Hölder et à remarquer que $\mathcal{A}_Z$ est une dérivation de l'algèbre extérieure, qui vaut $-\nabla Z$ sur les vecteurs tangents. ∎

23.8 Cas de la courbure négative pincée.– En coordonnées polaires d'origine x, on étudie le champ de vecteurs $Z = \frac{\partial}{\partial r}$. La forme bilinéaire $X, Y \mapsto \langle\nabla_X Z, Y\rangle$ est la seconde forme fondamentale des sphères. Si la courbure sectionnelle satisfait $-a^2 \leq K \leq -b^2$, les courbures principales, i.e., les valeurs propres λ de $\mathcal{A}_Z$ sur TM, satisfont $b \leq \lambda \leq a$, d'où

$$kb \leq E_k \leq ka.$$

23.9 Cas des espaces symétriques.– Les notations sont celles de 22.5. De nouveau, $Z = \frac{\partial}{\partial r}$. Le long de la géodésique $\exp(tX).x$, on transporte parallèlement les vecteurs de $\mathcal{M}$. Ainsi, $Z = X$, et $J = \sinh(t|\lambda(X)|)Y_\lambda$ est un champ de Jacobi nul à l'origine, qui satisfait $\mathcal{L}_Z J = [Z, J] = 0$, d'où

$$\mathcal{A}_Z J = -\nabla_Z J = -|\lambda(X)| \tanh(t|\lambda(X)|)J.$$

On a donc, asymptotiquement,

$$E_k(Z)(\exp(rX).x) = E_k(X) =: \max_{B\subset\Lambda,\,\#B=k} \sum_{\lambda\in B} |\lambda(X)|.$$

Autrement dit, $E_k(X) = E_n(X) - e_{n-k}(X)$.

23.10 Notation.– Lorsqu'elle est satisfaite pour toute forme $\omega \in \Omega_p^k(M)$, l'inégalité suivante est notée (k,p) :

$$\| \omega \|_p^p \leq \text{const.} \left(\| \omega \|_p \| d\omega^* \|_{p/p-1} + \| \omega \|_p^{p-1} \| d\omega \|_p \right). \qquad \text{(k,p)}$$

Noter que l'inégalité de Sobolev n'est autre que (0,p).

Dans une variété à courbure pincée entre $-a^2$ et $-b^2$, l'inégalité (k,p) est satisfaite dès que

$$p < \frac{(n-1)b}{ka}.$$

Dans un espace symétrique, l'inégalité (k,p) est satisfaite dès que

$$p < \min_{X\in\mathcal{M}} \frac{E_{n-1}(X)}{k\,E_k(X)}.$$

23.11 Lemme .– *Soit M une variété riemannienne. Si $d(\Omega_p^{k-1}(M))$ est fermé dans $\Omega_p^k(M)$, et si l'inégalité (k,p) est satisfaite, alors $d(\Omega_p^k(M))$ est fermé dans $\Omega_p^{k+1}(M)$.*

En effet, soient $\omega_j = d\beta_j$ des formes exactes qui convergent vers ω dans $\Omega_p^{k+1}(M)$. Comme $d(\Omega_p^{k-1}(M))$ est fermé, chaque β_j est cohomologue à une forme p-cofermée γ_j (lemme 23.5), i.e.,

$$d\gamma_j = \omega_j, \qquad d\gamma^* = 0.$$

D'après l'inégalité (k,p),

$$\| \gamma_j \|_p \leq \text{const.} \ \| \omega_j \|_p$$

est borné, donc on peut supposer que γ_j converge vers une k-forme γ faiblement dans $\Omega_p^k(M)$. Comme il y a convergence au sens des distributions, on a $\omega = d\gamma \in d(\Omega_p^k(M))$. ∎

Clairement, si les inégalités (0,p), (1,p),..., (k-1,p) sont satisfaites, alors $d(\Omega_p^{k-1}(M))$ est fermé dans $\Omega_p^k(M)$, donc chaque classe de cohomologie dans $H_{p,p}^k(M)$ contient une forme p-harmonique. Si de plus l'inégalité (k,p) est satisfaite, il n'y a pas de formes harmoniques, et on conclut (avec 22.4 et 22.6) :

7 Théorème .–
(i) Si M est simplement connexe, à courbure pincée entre $-a^2$ et $-b^2$, alors
- $H_{p,p}^k(M) = 0$ *si* $p < \frac{(n-1)b}{ka}$,
- $H_{p,p}^k(M) \neq 0$ *si* $\frac{(n-1)a}{kb} < p < \frac{(n-1)a}{(n-1)a-(n-k)b}$.

(ii) Si M est un espace symétrique, alors
- $H_{p,p}^k(M) = 0$ *pour tout*

$$p < \min_{X\in\mathcal{M}} \frac{E_{n-1}(X)}{E_k(X)},$$

- $H_{p,p}^k(M) \neq 0$ *pour tout*

$$\min_{X\in\mathcal{M}} \frac{e_n(X)}{e_{k+1}(X)} < p < \max_{X\in\mathcal{M}} \frac{e_n(X)}{e_n - e_{n-k+1}(X)}.$$

23.12 Exemples.– Le résultat ci-dessus est raisonnablement satisfaisant dans le cas de l'espace hyperbolique $\mathbf{R}^n$. En effet, combiné avec 22.6, il donne les conclusions suivantes

$$p < \frac{n-1}{k} H_{p,p}^k = 0$$
$$p = \frac{n-1}{k} \mathcal{H}_p^k = 0$$
$$\frac{n-1}{k} < p < \frac{n-1}{k-1} H_{p,p}^k \simeq \mathcal{H}_p^k \neq 0$$
$$p \geq \frac{n-1}{k-1} \mathcal{H}_p^k = 0$$

Il reste, même dans ce cas simple, bien des incertitudes. Sans parler des autre espaces symétriques, pour lesquels l'intervalle de non-nullité est vide. Voir au paragraphe 29 une tentative pour y remédier. La borne donnée pour la nullité est moins mauvaise, quoique souvent inférieure à 1. Toutefois, on obtient quand même, si $k \leq m-1$,

$$H_{p,p}^k(H^m \times \mathbf{R}^{\rho-1}) = 0 \text{ pour } p < \frac{m-1}{k},$$

$$H_{p,p}^k(\underbrace{H^m \times \cdots \times H^m}_{\rho \text{ fois}}) = 0 \text{ pour } p < \frac{m-1}{k}.$$

Références

[AS] M. ANDERSON, V. SCHRÖDER, *Existence of flats in manifolds of nonpositive curvature*, Preprint MSRI (1985).

[Be] Y. BENOÎT, , Communication privée.

[B] M. BERGER, *Géométrie*, CEDIC-Fernand-Nathan, Paris (1978).

[BI] B. BOJARSKII, T. IWANIEC, *Another approach to Liouville Theorem*, Math. Nachr. **107**, 253-262 (1982).

[Bo] N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématiques, Groupes et algèbres de Lie, chapitres 7 et 8*, Hermann, Paris (1975).

[Br] R.W BROCKETT, *Control theory and singular Riemannian geometry*, in "New directions in Applied Mathematics", P.J. Hilton and G.S. Young eds., pages 11-27, Springer, Berlin (1981).

[Bs] A.S. BESICOVITCH, *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions, I and II*, , Proc. Cambr. Phil. Soc. **41** (1945) 103-110, **42** (1946) 1-10.

[D] H. DONNELLY, *The differential form spectrum of hyperbolic space*, Manuscripta Math. **33** (1981), 365-385.

[DF] H. DONNELLY, CH. FEFFERMAN, *L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric*, Annals of Math. **118**, (1983),593-618.

[DX] H. DONNELLY, F. XAVIER, *On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **106**, (1984), 169-185.

[EO] P. EBERLEIN, B. O'NEILL, *Visibility manifolds*, Pacific Math. J. **46**, 45-109 (1973).

[E] V. EFREMOVITCH, *The proximity geometry of Riemannian manifolds*, Uspehi Mat. Nauk **8**, 189- (1953).

[ET] V. EFREMOVITCH, E. TICHONIROVA, *Equimorphisms of hyperbolic spaces*, Izv. Akad. Nauk CCCP **28**, 1139-1144 (1964)

[F1] J. FERRAND, *Etude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions, et généralisant les quasiconformes*, Duke Math. J. **40**, 163-185 (1973)

[F2] J. FERRAND, *Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes*, J. Differential Geom. **8**, 487-510 (1973).

[Fe] H. FEDERER, *Geometric measure theory*, Grundlehren Band 153, Springer Verlag Berlin..(1969).

[FS] G.B. FOLLAND, E.M. STEIN, *Estimates on the $\overline{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math. **27** 429-522 (1974).

[Fu] B. FUGLEDE, *Extremal length and functional completion*, Acta Math. **98**, 171-219 (1957).

[G1] M. GROMOV, *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, in "Riemann surfaces and related topics, Stony Brook 1978", pp. 183-215, Ann. of Math. Studies Vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton (1981).

[G2] M. GROMOV, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. I.H.E.S. **53**, 53-78 (1981).

[G3] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Notes de cours rédigées par J. Lafontaine et P. Pansu, CEDIC-Fernand-Nathan et Soc. Math. de France, Paris (1981).

[G4] M. GROMOV, , Communication privée.

[G5] M. GROMOV, *Infinite groups as geometric objects*, in "Proc. Intern. Cong. Math., Warsaw 1983", 384-389, Polish Sci. Publishers, Warsaw (1984).

[G6] M. GROMOV, *Asymptotic geometry of homogeneous spaces*, Proc. Conf. "Differential Geometry on Homogeneous Spaces", Torino (1983), Rend. Sem. Mat. Polyt. Torino, Fasc. Spe. (1985).

[G7] M. GROMOV, *Hyperbolic groups*, Preprint I.H.E.S. (1987)

[Ge] F.W. GEHRING, *Rings and quasiconformal mappings in space*, Trans. Amer. Math. Soc. **103**, 353-393 (1962).

[GH] PH. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience Publications, New York (1978)

[GM] F.W. GEHRING, G.J. MARTIN, *Discrete quasiconfomal groups I*, Preprint MSRI, Berkeley (1986).

[Go] R. GOODMAN, *Nilpotent Lie groups, structure and applications to analysis*, Lecture Notes in Math. Vol. 562, Springer, Berlin (1976).

[GiT] S. GILBARG, N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren No 224, Springer, Berlin...(1977).

[GTh] M. GROMOV, W. THURSTON, *Pinching constants for hyperbolic manifolds*, à paraître.

[Ha] U. HAMENSTÄDT, *On the geometry of Carnot-Caratheodory metrics*, Preprint Univ. Bonn (1985).

[H] E. HEINTZE, *On homogeneous manifolds of negative curvature*, Math. Annalen **211** (1974), 23-24.

[K] M. KANAI, *Analytic inequalities and rough isometries between noncompact Riemannian manifolds*, Research report, Keio University, Tokyo (1986).

[KR1] A. KORANYI, H. REIMANN, *Quasiconformal mappings on the Heisenberg group*, Invent. Math. **80**, 309-338 (1985).

[KR2] A. KORANYI, H. REIMANN, *Horizontal normal vectors and conformal capacity of spherical rings in the Heisenberg group*, Bull. Sci. Math **111**, 3-22 (1987).

[Mv] A. MALCEV, *On a class of homogeneous spaces*, Izv. Akad. Nauk CCCP **13**, 9-32 (1949) ; traduction anglaise : Amer. Math. Soc. Translations, Vol. 9, 1951.

[Ma1] G.A. MARGULIS, *Certain measures associated with U-flows on compact manifolds*, Funkt. Analis i Prilozh. **4** (1970) 55-67.

[Ma2] G.A. MARGULIS, *The isometry of closed manifolds of constant negative curvature with same fundamental group*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **192**, 736-737 (1970).

[Ma3] G.A. MARGULIS, *Groupes discrets d'isométries des variétés à courbure négative*, in "Proc. Intern. Cong. Math. Vancouver 1974", Vol. 2, pages 21-34, Canadian Math. Congress (1974).

[Mi] J. MITCHELL, *On Carnot-Caratheodory metrics*, J. Diff. Geom. **21**, 35-45 (1985).

[Mo] M. MORSE, *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **22**, 84-100 (1921).

[M1] G.D. MOSTOW, *Quasiconformal mappings in n-space and the strong rigidity of hyperbolic space forms*, Publ. Math. I.H.E.S. **34**, 53-104 (1968).

[M2] G.D. MOSTOW, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. of Math. Studies, Vol. 78, Princeton Univ. Press, Princeton (1973)

[P1] P. PANSU, *Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés*, Ergod. th. Dynam. Syst. **3**, 415-445 (1983).

[P2] P. PANSU, *Quasiconformal mappings and manifolds of negative curvature*, Proc. Taniguchi Symposium "Curvature and Topology of Riemannian manifolds, Katata (1985)", Lecture Notes Nr 1201, Springer, Berlin (1986).

[PZ] P. PANSU, R. ZIMMER, *Rigidity of locally homogeneous metrics of negative curvature on the leaves of a foliation*, Soumis à Erg. Th. Dynam. Syst.

[R] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, Mc Graw Hill, New York (1974).

[RS] V. STEPANOV, *Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale*, Mat. Sbornik **32**, 511-527 (1925).

[S] E.M. STEIN, *Singular integrals and the differentiability properties of functions*, Princeton Math. Series, Vol. 30, Princeton Univ. Press, Princeton (1970).

[St] R. STRICHARTZ, *Analysis of the Laplacian on a complete Riemannian manifold*, J. Funct. Anal. **52** (1983), 48-79.

[Su] D. SULLIVAN, *On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions*, pages 465-496 in "Riemann Surfaces and related topics, Stony Brook 1978", Ann. of Math. Studies, Vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton (1981).

[Ta] N. TANAKA, *On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras*, Hokkaido Math. J. **8**, 23-84 (1979).

[T] W. THURSTON, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Preprint Univ. Princeton (1980).

[T1] P. TUKIA, *A quasiconformal group not isomorphic to a Möbius group*, Ann. Sci. Acad. Fenn. Ser. A I **6** (1981) 149-160.

[T2] P. TUKIA, *Quasiconformal extension of quasisymmetric maps compatible with a Möbius group*, Acta Math. **154**, 153-193 (1985).

[T3] P. TUKIA, *On quasiconformal groups*, J. d'Analyse Math. **46**, 318-346 (1986).

[V1] J. VÄISÄLÄ, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math. Vol. 229, Springer, Berlin (1971).

[V2] J. VÄISÄLÄ,, *Quasimöbius maps*, J. d'Anal. Math. **44**, 218-234 (1984).

[Va] N. VAROPOULOS, *Chaînes de Markov et inégalités isopérimétriques*, C. R. Acad. Sci. Paris **298** (10), 233-236 (1984).

[Ve] M. VERGNE, *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes, application à l'étude des variétés d'algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. de France **98**, 81-116 (1970).

[Vi] M. VILLE, *On $\frac{1}{4}$-pinched Riemannian manifolds of negative curvature*, Ann. Global An. Geom. **3**, 329-336 (1985).

[Vu] M. VUORINEN, *Conformal Invariants and quasiregular mappings*, J. d'Analyse Math. **45**, 69-115 (1985).

[W] E.N. WILSON, *Isometry groups on homogeneous nilmanifolds*, Geom. Dedic. **12**, 337-346 (1982).

[Z] R. ZIMMER, *Ergodic theory and semi-simple Lie groups*, Monographs in Math. Vol. 81, Birkhäuser, Basel (1984).