Intégration et probabilités

Cours n° 17

23 Avril 2024

S. Nonnenmacher

USTC

Théorie des probabilités (1 application de la théorie de la mesure)

Nouvelles notations, spéciales aux probabilités

Th. de la mesure	Probabilités
$(E, \mathcal{A}, \mu$ mesure de probab.$)$ espace mesuré	$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace de probabilité
$A \in \mathcal{A}$ partie mesurable	$A \in \mathcal{A}$ <u>évènement</u>
$f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (F, \mathcal{B})$ fonction mesurable	<u>Variable aléatoire</u> à valeur dans $(F, \mathcal{B})$. Notée $X : \Omega \longrightarrow F$ mesurable $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.
$\mu(A)$ poids de A	$\mathbb{P}(A)$ = probabilité de l'évènement A.
f à valeurs réelles $\int f \, d\mu$ intégrale	$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$ <u>espérance de X</u>. (X à valeurs réelles)
Mesure image $f_*\mu$: mesure sur $(F, \mathcal{B})$.	$X_* \mathbb{P} = P_X$ mesure sur $(F, \mathcal{B})$ = la <u>loi de la variable aléatoire X</u>. Mesure de probab. sur $(F, \mathcal{B})$.

éléments et E : x. point de E	élément de Ω : ω représente une possibilité, ou une éventualité.

Ω contient tous les résultats possibles lorsqu'on fait une expérience. ω détermine les résultats de mesures de différentes quantités lors de cette expérience.

. $\mathcal{A}$ = tribu des évènements.
Souvent, 1 évènement A correspondra à une certaine propriété physique. Ex : gaz dans 1 boîte. On mesure la température. Chaque micro-état du gaz = un certain ω. Mesure de la température $T : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$
$\omega \longmapsto T(\omega)$.

ex. d'évènement : pour $T_0 > 0$ fixé
$$A = \{T(\omega) \geq T_0\} = T^{-1}([T_0, +\infty[)$$

- $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$. Probabilité de l'évènement A.

<u>Expérience aléatoire</u> : en recommençant une expérience N fois, on peut obtenir à chaque fois des résultats différents.
On essaye de deviner quels sont les résultats possibles, et si certains résultats sont plus probables que d'autres.

ex : tirage de dés  (dé normal).

A chaque tirage, j'ai une probabilité $\frac{1}{6}$ d'obtenir le numéro 1.

Si je tire N fois le dé, combien de fois vais-je obtenir 1 ?

$A = \{$j'obtiens le résultat "1"$\}$.

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$. Si je tire N fois, soit N_A = le nombre de fois où j'obtiens 1.

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N} \overset{?}{=} \frac{1}{6}$$

Exemples d'espaces de probabilité

1. Tirages finis d'1 dé

Dés à 6 faces. Je le lance 1 fois.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ tribu totale.

Dé non truqué $\Rightarrow P(\omega) = \frac{1}{6}$.

Événement possible : $A = \{$je tire un nombre pair$\}$

$= \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.

Si on a 2 dés, ou qu'on tire 2 fois le même dé

$\Rightarrow \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$

Si les dés ne sont pas truqués $\Rightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, 6\}$, $P((i,j)) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

$A_1 = \{$ j'obtiens 1 lors du premier tirage $\}$
$= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6)\} \subset \Omega_2.$

2. Je tire et retire le dé, jusqu'à obtenir le chiffre 6.
Qu: combien de temps faut-il attendre avant d'obtenir un 6?
Résultat : n_s temps d'arrêt $n_s \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$
Quel espace Ω utiliser?
$$\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}.$$
Espace de proba plus gros qui contient tous les résultats de tous les tirages

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}^*} = \{\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_3, \dots, \text{ avec } \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

Ω indénombrable. $\quad \varphi : \Omega \longmapsto [0,1]$

$$\omega \longmapsto \varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k - 1}{6^k}$$

Représentation d'un nombre $x \in [0,1]$ en base 6.

φ est surjective : $\forall x \in [0,1]$, $\exists\ \omega_1, \omega_2, \dots$ tq $\varphi(\omega) = x$.

φ est presque injective : $\varphi(1666666\dots) = \varphi(2111111)$

(cf : en base 2, $10000\dots = 0111111$).

Quelle tribu mettre sur Ω ?

Evènement naturel : considérer les résultats des n premiers tirages

$i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots 6\}$

$$A_{i_1 \dots i_n} = \{\omega = i_1 i_2 \dots i_n \omega_{n+1} \dots\}$$
$$= \{\omega \in \Omega \text{ t.q. } \omega_1 = i_1,\ \omega_2 = i_2 \dots \omega_n = i_n\} \subset \Omega$$

$\mathcal{A} :=$ la plus petite tribu contenant ces évènements.

$\mathbb{P}$ naturelle (si le dé n'est pas truqué) :

$\forall$ choix de $i_1, \dots, i_n$, $\quad \mathbb{P}(A_{i_1 \dots i_n}) = \dfrac{1}{6^n}$.

$$\{A_{i_1 \dots i_n} ; n \in \mathbb{N}^*, i_j \in \{1, \dots, 6\}\} = \mathcal{C}$$

$\mathcal{C}$ invariante par intersections finies

$\overset{LCM}{\Longrightarrow}$ il existe au plus 1 seule $\mathbb{P}$ qui vérifie

$\Rightarrow$ unicité de cette mesure $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Existence ? $\quad \varphi(A_{i_1 \dots i_n}) = I_{i_1 \dots i_n} = \left[x_{i_1 \dots i_n}, x_{i_1 \dots i_n} + \dfrac{1}{6^n}\right[\subset [0,1]$

avec $x_{i_1 \dots i_n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\omega_j - 1}{6^j}$

$\dfrac{1}{6^n} = \lambda_1(I_{i_1 \dots i_n})$.

Sur ces intervalles $I_{i_1 \dots i_n}$, $\quad \varphi_* \mathbb{P}$ prend la valeur de λ_1.

Peut-on aller de λ_1 vers $\mathbb{P}$? Il faudrait inverser φ.

Or φ n'est pas injective $\to$ pb !!

Le défaut d'injectivité concerne les suites de la forme

$$\omega = i_1 i_2 \cdots i_n \, 11111 \quad , \quad \text{avec } i_n \neq 1.$$

$$\omega' = i_1 i_2 \cdots (i_n - 1) \, 666666$$

$\varphi(\omega) = \varphi(\omega')$.

$\varphi(\omega) = x_{i_1 \cdots i_n}$ Ces points $x_{i_1 \cdots i_n}$ forment un ensemble dénombrable, donc λ_1-négligeable.

On fabrique un quasi-inverse de φ par :

- si $x \notin \{x_{i_1 \cdots i_n}\} \Rightarrow \varphi^{-1}(\{x\}) = \omega$

  On définit $s(x) = \omega$.

- si $x = x_{i_1 \cdots i_n}$, on définit $s(x) = i_1 i_2 \cdots i_n 1111$

⇒ applicat° $s : [0,1] \to \Omega$, telle que $\varphi \circ s = id_{[0,1]}$.

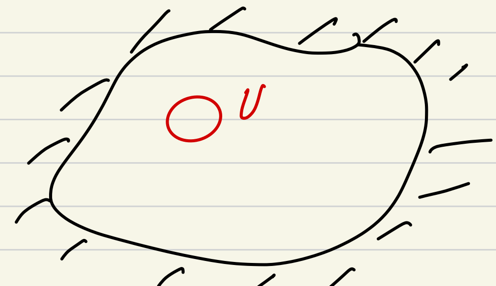
Cette application s est mesurable entre $\mathcal{B}([0,1])$ et $\mathcal{A}$.

Je définis $\mathbb{P} := s_* \lambda_1$.

On a bien $\mathbb{P}(A_{i_1 \dots i_n}) = \lambda_1(I_{i_1 \dots i_n}) = \frac{1}{6^n}$.

⇒ $\mathbb{P}$ est bien l'unique mesure qui vérifie cette égalité.

- Lois continue : en mécanique quantique, on ne peut décrire la position de l'électron que par une densité de probabilité de présence. $B \subset \mathbb{R}^d$



$U \subset B$ boule

La mécan. quantique décrit la probabilité, au temps t, de trouver / mesurer mon électron dans la boule U.

$\Omega = B = \{x \in B\} \subset \mathbb{R}^d$ $\omega = x$ position de la particule.

$= \mathbb{P}_t(U)$. $\qquad \mathbb{P}_{t_0}$ mesure de probab. dans la tribu borélienne $\mathcal{B}(B)$.

En général, $\mathbb{P}_t \ll \lambda_B$

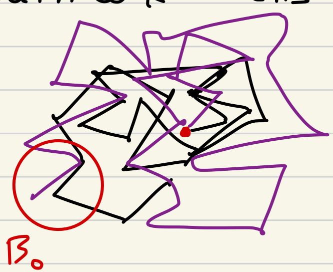
↳ Lebesgue dans $B \subset \mathbb{R}^d$.

$\mathbb{P}_t = \rho \cdot \lambda_B$

↳ $\rho(x)$ densité de probabilité, avec $\mathbb{P}_t(B) = \int_B \rho \, d\lambda_B = 1$.

- Ex en physique statistique :

particule dans 1 boîte contenant un fluide, soumise à des forces aléatoires, exercées par les particules du fluide.



$$\omega = \text{fonction } \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$t \longmapsto \omega(t) = \text{position de } \bullet \text{ au temps } t.$$

ω = trajectoire de ma particule.

$\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$. ensemble des trajectoires continues.

ou $\Omega = \{ \omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^1)$, avec $\omega(0) = x_0 \}$.

Evènements : { au temps $t = t_0$, ma particule se trouve dans une boule $B_0 \in \mathbb{R}^d$ }

$\Rightarrow$ il faut que la fonction $f_{t_0} = \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ soit mesurable

$$\omega \longmapsto \omega(t_0)$$

Ma tribu $\mathcal{F}$ sur Ω sera la + petite telle que toutes ces fonctions $(f_{t_0}\,;\, t_0 \in \mathbb{R}_+)$ soient mesurables $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

. <u>Variable aléatoire et sa loi</u>

<u>Déf :</u> $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \mathcal{E})$ fonction mesurable, est

v.a. appelée <u>variable aléatoire</u> à valeurs dans E.

Si $E = \mathbb{R}$ (et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$), on parle variable aléatoire réelle.

Si $E = \mathbb{R}^d$ - - vectorielle

Typiquement, X représente une grandeur physique qu'on peut mesurer.

On les notera par la lettre X (ex : $X_1, X_2, X_3 \ldots$)

Ex : 1) tirage 2 dés : on peut considérer la v.a.

$$X((i,j)) = i+j, \quad \text{à valeurs dans } E = \{2, 3, \ldots, 12\}$$

2) Temps d'arrêt n_6 :

$$X(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } \omega_n = 6\}, \quad \text{avec } X(\omega) = +\infty \text{ si } \omega_i \neq 6, \forall i.$$

$E = \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, de tribu totale.

Ce X est-il mesurable $\mathcal{A} \to \mathcal{P}(\overline{\mathbb{N}^*})$?

$\forall k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $X^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{A}$?

$$X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega ;\ \omega_1 \neq 6, \omega_2 \neq 6, \ldots \omega_{k-1} \neq 6, \omega_k = 6\}$$

$$= \bigsqcup_{i_1, \ldots, i_{k-1}=1}^{5} A_{i_1 \ldots i_{k-1} 6} \quad \text{est mesurable.}$$

$X^{-1}(\{+\infty\}) = \{\omega \in \Omega ;\ \omega_j \neq 6,\ \forall j \in \mathbb{N}\}.$

$\downarrow \varphi$

ensemble de Cantor dans $[0,1]$, qui est borélien.

$\Rightarrow X^{-1}(\{+\infty\}) = \varphi^{-1}(\text{Cantor}) \in \mathcal{F}.$

Ce $X^{-1}(\{+\infty\})$ a pour mesure $\mathbb{P}(X^{-1}(\infty)) = \lambda_1(\text{Cantor}) = 0.$

3). Electron dans la boîte : $\omega \in \Omega$ est la position de la particule. V. a. possible = position $X(\omega) = \omega$.

$\Omega = B = E.$

4) Mouvement de la particule dans le fluide :

On peut vouloir mesurer la position de la particule au temps t : $X(\omega) = \omega(t) = f_t(\omega)$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ mesurable par définition de la tribu $\mathcal{F}$.

Déf : La loi d'une v.a. X est la mesure image de $\mathbb{P}$ par X. C'est une mesure de proba sur l'espace image $(E, \mathcal{E})$, qu'on notera P_X.

$$\forall B \in \mathcal{E}, \quad P_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$$
$$= \mathbb{P}(X \in B) \leftarrow \text{cette notation donne plus d'importance à } X \text{ qu'à } \Omega.$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\})$$

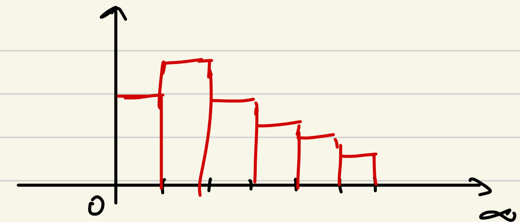
ex : $\mathbb{P}(T \geq T_0)$

La loi P_X, qui est définie sur E, un espace de grandeurs physiques. P_X permet de calculer la probabilité des événements ne dépendant que de cette grandeur physique

ex : $A = \{T \geq T_0\}$.

La loi P_X nous fournit la distribution des valeurs de la v.a. X.

Histogramme de mesures répétées de la v.a. X $\longrightarrow$ lorsque $N \to \infty$, on obtient une approximation de la loi P_X.



· Types de v.a.

· v.a. discrètes : E discret (ex : $E = \mathbb{N}$), avec la tribu totale $\mathcal{P}(E)$.

Toute loi de probabilité sur E peut s'écrire sous la forme

$$P_X = \sum_{x \in E} p_x \, \delta_x \qquad \left(\text{ex} : P_X = \sum_{n \geq 0} p_n \, \delta_n\right).$$

avec la normalisation $P_X(E) = 1 = \sum_{x \in E} p_x$.

$p_x \in [0, 1]$.

$$\forall B \subset E, \quad \mathbb{P}\Big(\bigsqcup_{x \in B} \{X = x\}\Big) = \sum_{x \in B} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in E} \mathbb{P}(X = x) \, \mathbb{1}_B(x) = \sum \mathbb{P}(X = x) \, \delta_x(B)$$

Ex : temps d'arrêt n_6 = $X(\omega) = \inf\{j \,;\, \omega_j = 6\} \in \underbrace{\overline{\mathbb{N}^*}}_{E}$

$\mathbb{P}$ mesure sur $\Omega = \{1, \dots 6\}^{\mathbb{N}^*}$.

$\hookrightarrow P_X \overset{?}{=}$

$$p_k = P_X(X = k) = \mathbb{P}\Big(\coprod_{i_1, \dots i_{k-1}=1}^{5} A_{i_1 \dots i_{k-1} 6}\Big) = \frac{1}{6^k} \times 5^{k-1} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$ (on le savait puisque $\lambda_1(\text{Cantor}) = 0$)

- <u>v.a. à densité</u>

<u>Déf :</u> Une v.a. à valeurs dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ est appelée v.a. à densité si sa loi P_X est absolument continue p/r à λ_d.

Th. de Radon-Nikodym $\Rightarrow \exists\, p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ borélienne, telle que $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $P_X(B) = \int_B p(x)\, d\lambda_d(x)$

On doit avoir $\int_{\mathbb{R}^d} p(x)\, d\lambda_d(x) = 1.$ $\Rightarrow$ p est λ-intégrable.

p est bien définit dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda_d)$.

p est appelée la densité de la loi P_X / de X.

exr $d=1$: $\mathbb{P}(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_\alpha^\beta p(x)\, d\lambda_1(x) \in [0,1]$.

- Espérance d'1 v.a. réelle (ou vectorielle).

Déf : Soit X une v.a. réelle. On note alors

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

Cette intégrale est bien définie :

1) si $X \geqslant 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

2) si X est intégrable p/r à $\mathbb{P}$: $\mathbb{E}[|X|] = \int |X|\, d\mathbb{P} < \infty$.

→ on peut étendre aux v.a. vectorielles $X = (X_1, X_2, .., X_d)$.

v.a. réelles.

$\mathbb{E}[X] \in (\overline{\mathbb{R}})^d$, existe si tous les $\mathbb{E}[X_i]$ existent.

- Si on prend la v.a. $X = \mathbb{1}_A$, pour $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$.

- Interprétation de $\mathbb{E}$: la <u>moyenne</u> de X, par rapport à la mesure de proba $\mathbb{P}$.

ex : $\Omega = \{1, .., 6\}$, avec $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $\forall i$.

$X : \Omega \to \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} X(i)$.

Prop° Soit X une v.a. à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. $\forall f : (E, \mathcal{E}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ fonction mesurable ≥ 0, la v.a. composée $f(X) = f \circ X$ a comme espérance

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_E f(x) P_X(dx)$$

Cette espérance est bien définie, puisque $f \circ X$ est une v.a. positive

Preuve : Si $f = \mathbb{1}_B$, où $B \in \mathcal{E}$, on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X)] = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = P_X(B) = \int_E \mathbb{1}_B \, dP_X$$

$\mathbb{1}_B \rightsquigarrow$ fonctions étagées $\geqslant$ sur $(E, \mathcal{E})$ $\rightsquigarrow$ fonctions mesurables $\geqslant 0$ sur $(E, \mathcal{E})$. $\square$

. Si f change de signe, la prop$^{\circ}$ reste vraie si

$\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$. $\Rightarrow f(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{P})$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(E, P_X)$.

La v.a. $f(X)$ est dite totalement dépendante de la v.a. X.

Pour connaître les propriétés statistiques de la v.a. $f(X)$, il suffit de connaître la loi P_X.

Inversement si, $\forall f$ fonction "assez générale", on peut écrire $\mathbb{E}[f(X)] = \int f \, d\nu$ pour une certaine mesure de proba ν, alors $\nu = P_X$.
