Intégration et Probabilités

Cours n° 6

14/03/2024

USTC

S. Nonnenmacher

- Thm de convergence monotone : (f_n) suite $\uparrow$,

$f_n \longrightarrow f$

$$\lim_{n\to\infty} \uparrow \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Théorème [Lemme de Fatou]

$(E, \mathcal{A}, \mu)$, $(f_n)_{n \geqslant 0}$ suite de fonctions mesurables $\geqslant 0$.

Alors $$\int \underbrace{\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)}_{\text{mesurable} \geqslant 0} d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

Remarque : si la suite (f_n) est $\uparrow$, alors on a :

$$\int (\lim f_n) \, d\mu \underset{\text{TCM}}{=} \lim \uparrow \int f_n \, d\mu$$

Preuve du Lemme de Fatou :

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\uparrow \underbrace{\left(\inf_{k\geq n} f_k\right)}_{F_n \text{ mesurable } \geq 0}$$

la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est croissante

$$\left(\inf_{k\geq n+1} f_k\right) \geq \inf_{k\geq n} f_k$$

$$\inf_{k\geq n} f_k = \inf_{\substack{k\geq n+1 \\ \text{ou } k=n}} f_k$$

TCM sur (F_n) :

$$\int\left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)d\mu = \int\left(\lim_{n\to\infty}\uparrow F_n\right)d\mu = \lim_{n\to\infty}\uparrow\int F_n\, d\mu$$

$$\underline{F_n \leq f_n}, \quad \leq f_{n+1}, \quad \ldots$$

$$\downarrow$$

$$\int F_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \qquad\qquad a_n \leq b_n \quad \forall n$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Rightarrow \liminf a_n \leq \liminf b_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} \int F_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

$$\shortparallel$$

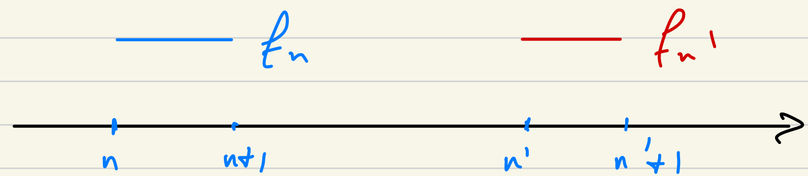
$$\lim_{n\to\infty} \int F_n \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \uparrow \int F_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

$\square$

<u>Exemples d'inégalités strictes</u>

1. $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$



$\mu = \lambda_1$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = 0$$

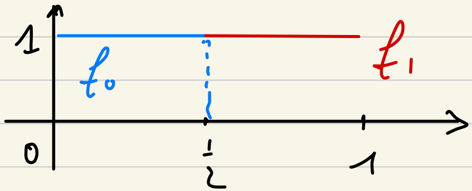
$$\forall n \quad \int f_n \, d\lambda_1 = \int_n^{n+1} 1 \, d\lambda_1 = 1$$

$$0 = \int (\liminf f_n)\, d\lambda_1 < \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\lambda_1 = 1.$$

2. On prend $f_0 = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$ et $f_1 = \mathbb{1}_{]\frac{1}{2},1]}$.

Si n impair $\Rightarrow f_n = f_1$.

poir $\Rightarrow f_n = f_0$



$\forall x \in [0,1]$, $f_n(x)$ oscille entre 0 et 1.

$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, $f_n(x) = 0$

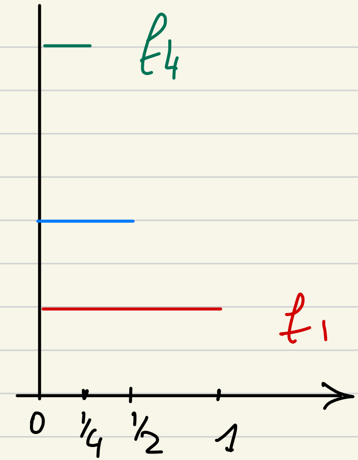
$$\Rightarrow \int (\liminf f_n)\, d\lambda_1 = 0$$

$$\int f_0 \, d\lambda_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot d\lambda(x) = \frac{1}{2} = \int f_1 \, d\lambda_1$$

$$\Rightarrow \forall n, \int f_n \, d\lambda_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \int (\liminf_n f_n)\, d\lambda_1 < \liminf_n \int f_n \, d\lambda_1$$

3. $f_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$



$$\int f_n \, d\lambda_1 = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

$\underline{\underline{\forall x > 0}}$, $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$

$\forall x < 0$ ou $\forall x > 1 \Rightarrow f_n(x) = 0, \ \forall n.$

$x = 0$? $\quad f_n(0) = n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

$$f := \lim_{n \to \infty} f_n = +\infty \, \mathbb{1}_{\underbrace{\{0\}}_{\hookrightarrow \lambda_1\text{-négligeable}}} \Rightarrow \int f \, d\lambda_1 = 0 \quad \left(\text{car } (+\infty) \times 0 = 0\right)$$

$$= \liminf_{n \to \infty} f_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int \left(\liminf f_n\right) d\lambda_1}_{= 0} < \underbrace{\liminf \int f_n \, d\lambda_1}_{= 1}.$$

Comment définir l'intégrale de fonctions mesurables non positives ?

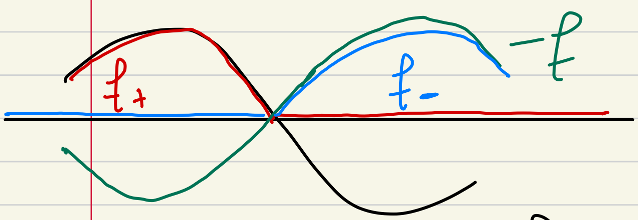
Problème : lorsque les parties positives et négatives de f sont d'intégrales $= +\infty$.

$f : E \to \mathbb{R}$ mesurable

$\Rightarrow \quad f_+ := \max(f, 0)$ partie positive de f.

$f_- := \max(-f, 0)$ partie négative de f

⚠ f_- est une fonction positive



On a : $f = f_+ - f_-$

On pourrait définir $\int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$.

Problème : si $\int f_+ \, d\mu$ et $\int f_- \, d\mu = +\infty$

$(+\infty) - (+\infty) = ?$

$\longrightarrow$ Solution : restreindre la classe des fonctions qu'on va intégrer.

<u>Définition</u> Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable.

On dit que f est intégrable par rapport à μ (ou μ-intégrable)

si
$$\int \underbrace{|f|^1}_{\text{mesurable car } |f| = f_+ + f_- \geq 0} d\mu < \infty .$$

Alors, on définit
$$\int f \, d\mu = \underbrace{\int f_+ \, d\mu}_{< +\infty} - \underbrace{\int f_- \, d\mu}_{< +\infty} \in \mathbb{R} .$$

Notation : on note $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace des fonctions intégrables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

$\mathcal{L}^1_+(E, \mathcal{A}, \mu)$ = fonctions intégrables positives.

- Si $f \in \mathcal{L}^1_+(E, \mathcal{A}, \mu)$ $\left(= \mathcal{L}^1_+(E) = \mathcal{L}^1_+ \right)$.

  alors $f = f_+$, $f_- = 0$ $\Rightarrow \int f \, d\mu = \int f_+ \, d\mu$.

- On aurait pu supposer que f prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

  Mais si f intégrable $N_f = \{x : f(x) = +\infty \text{ ou } f(x) = -\infty\}$

  est μ-négligeable.

  Si je change $f \longrightarrow$ sur N_f, je prends $\tilde{f}(x) = 0$.

  sur $E \setminus N_f$, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

  $f = \tilde{f}$ p.p. $\qquad \tilde{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}$.

  $|f| = |\tilde{f}|$ p.p. $\Rightarrow$ $\int |\tilde{f}| \, d\mu = \int |f| \, d\mu < \infty$

  On peut prendre $\int \tilde{f} \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Montrons les propriétés de cette intégrale des fonctions dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Prop°

a) $\forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, $\quad \left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$

(inégalité triangulaire : généralité $\left|\sum_j a_j\right| \leq \sum_j |a_j|$)

b) $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel (réel), et l'application : $f \longmapsto \int f \, d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1$.

$\forall f, g \in \mathcal{L}^1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\quad af + bg \in \mathcal{L}^1$, et

$$\int (af + bg) \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu.$$

c) Si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $f \leq g$, alors $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

(positivité de l'$\int$)

$\Leftrightarrow$ si $f \geq 0 \Rightarrow \int f \, d\mu \geq 0$.

d) Si $f, g \in \mathcal{L}^1$, et si $f = g$ p.p. alors $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

Preuve: $f = f_+ - f_- \Rightarrow \int f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu$

$$\left| \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu \right| \leq \left| \int f_+ \, d\mu \right| + \left| \int f_- \, d\mu \right|$$

$\leq$ triang. standard

$$\leq \int f_+ \, d\mu + \int f_- \, d\mu$$

$$\leq \int (f_+ + f_-) \, d\mu \qquad f_+ + f_- = |f| .$$

$$\leq \int |f| \, d\mu$$

b) $f \in \mathcal{L}^1$, $a \in \mathbb{R}$. $\int |af| \, d\mu = |a| \int |f| \, d\mu \Rightarrow af \in \mathcal{L}^1$.

Montrons que $\int (af) \, d\mu = a \int f \, d\mu$.

Cas $a \geq 0$. $\Rightarrow af = a(f_+ - f_-) = af_+ - af_-$

$$\Rightarrow \int (af) \, d\mu = \int (af_+) \, d\mu - \int (af_-) \, d\mu \qquad \text{par la linéarité positive.}$$

$$= a\int f_+ \, d\mu \quad - \quad a\int f_- \, d\mu$$

$$= a \underbrace{\left(\int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu \right)}$$

$$= a \int f \, d\mu \, .$$

Cas $a < 0$. $\quad (af)^+ = (-a) f^- \quad$ et $\quad (af)^- = (-a) f^+$

$$\int (af) \, d\mu = \int (-a) f^- \, d\mu - \int (-a) f^+ \, d\mu$$

$$= (-a) \int f^- \, d\mu - (-a) \int f^+ \, d\mu$$

$$= (-a) \left(\int f^- \, d\mu - \int f^+ \, d\mu \right)$$

$$= a \left(\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right)$$

$$= a \int f \, d\mu \, .$$

. $f, g \in \mathcal{L}^1 \quad \forall x, \; |f(x) + g(x)| \leq \underbrace{|f(x)| + |g(x)|}_{\in \, \mathcal{L}^1}$

$$\Rightarrow f + g \in \mathcal{L}^1 .$$

On veut montrer $\int (f+g)\, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.

$$(f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$$

$$\iff \int \left((f+g)^+ + f^- + g^-\right) d\mu = \int \left((f+g)^- + f^+ + g^+\right) d\mu$$

fonctions intégrables ≥ 0

$$\int (f+g)^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int (f+g)^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int (f+g)^+ - \int (f+g)^-}_{\int (f+g)\, d\mu} = \underbrace{\int f^+ - \int f^-}_{\int f \, d\mu} + \underbrace{\int g^+ - \int g^-}_{\int g \, d\mu}$$

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

c) Si $f \leq g$ intégrables $\Rightarrow (g-f) \geq 0$ et intégrable

$f \leq g$ μ-p.p. $\quad 0 > \int (g-f)\, d\mu \geq 0$

$$\Rightarrow \int g \, d\mu = \int f \, d\mu + \underbrace{\int (g-f) \, d\mu}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow \int g \, d\mu \geq \int f \, d\mu.$$

d) $f = g$ p.p. $\Longrightarrow$ $f^+ = g^+$ p.p. et $f^- = g^-$ p.p.

$$\Rightarrow \int f^+ \, d\mu = \int g^+ \, d\mu \quad \text{et} \quad \int f^- \, d\mu = \int g^- \, d\mu$$

$$\Rightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

- <u>Fonctions à valeurs complexes ou vectorielles</u>

$f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ est mesurable si, $\forall B \subset \mathbb{C}$ borélien, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. $\quad \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$

f mesurable $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ mesurables.

Déf° $(E, \mathcal{A}, \mu)$. $f : E \to \mathbb{C}$ mesurable. f est intégrable ssi $|f| : E \to \mathbb{R}_+$ est intégrable. On note $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, \mathcal{A}, \mu)$

$$\left(\mathrm{Re} f, \ \mathrm{Im} f \to \sqrt{(\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2} \Rightarrow |f| \text{ est mesurable.} \right)$$

On définit l'intégrale $\boxed{\int f \, d\mu := \int (\mathrm{Re} f) \, d\mu + i \int (\mathrm{Im} f) \, d\mu}$

En effet, si $|f| \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} |\mathrm{Re} f| \leq |f| \\ |\mathrm{Im} f| \leq |f| \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Re} f \in \mathcal{L}^1 \\ \mathrm{Im} f \in \mathcal{L}^1 \end{array}\right.$

$$\mathrm{Re} f \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \mathrm{Im} f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1.$$

Prop° Les propriétés a) b) d) de la prop° précédente restent valables.

La propriété de linéarité b) s'étend facilement aux fonctions complexes.

$$\int (a f) \, d\mu = \int (\mathrm{Re}\, a + i \, \mathrm{Im}\, a)(\mathrm{Re} f + i \, \mathrm{Im} f) = \int \Big((\mathrm{Re}\, a \, \mathrm{Re} f - \mathrm{Im}\, a \, \mathrm{Im} f) +$$

$$+ i \left(\mathrm{Re}\, a\, \mathrm{Im} f + \mathrm{Im}\, a\, \mathrm{Re} f \right) \Big) d\mu$$

$$= \int (\qquad) + i \int (\qquad)$$

$$= \mathrm{Re}\, a \int \mathrm{Re} f - \mathrm{Im}\, a \int \mathrm{Im} f + i \left(- - - \right)$$

$$= (\mathrm{Re}\, a + i\, \mathrm{Im}\, a) \int \mathrm{Re} f + i \int \mathrm{Im} f$$

$$= a \int f \, d\mu \,.$$

a) Montrons l'inégalité triangulaire

On utilise : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = \max_{\substack{u \in \mathbb{C} \\ |u| = 1}} \mathrm{Re}(uz)$

Alors $\left| \int f \, d\mu \right| = \max_{\substack{u \in \mathbb{C} \\ |u| = 1}} \mathrm{Re} \left(u \underbrace{\int f \, d\mu}_{\int \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int \mathrm{Im} f \, d\mu} \right)$

$u = \mathrm{Re}\, u + i\, \mathrm{Im}\, u$

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \max_{\substack{u\in\mathbb{C}\\|u|=1}} \left(\operatorname{Re} u \int \operatorname{Re} f - \operatorname{Im} u \int \operatorname{Im} f\right)$$

$$= \max_{\substack{u\in\mathbb{C}\\|u|=1}} \underbrace{\int (\operatorname{Re} u \operatorname{Re} f - \operatorname{Im} u \operatorname{Im} f)\,d\mu}_{\displaystyle\int \operatorname{Re}(uf)\,d\mu}$$

$$= \max_{|u|=1} \int \operatorname{Re}(uf)\,d\mu$$

$$\forall u, |u|=1, \quad \operatorname{Re}(uf) \leq |f|$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{Re}(uf)\,d\mu \leq \int |f|\,d\mu$$

$$\left|\int f\,d\mu\right| = \max_{|u|=1} \int \operatorname{Re}(uf)\,d\mu \leq \int |f|\,d\mu .$$

<u>Exercice</u> : généraliser la notion d'intégrabilité et d'intégrale pour les fonctions $f : E \to \mathbb{R}^d$.

Oubli : si $f = g$ p.p. $\Rightarrow$ $\mathrm{Re} f = \mathrm{Re}\, g$ p.p.

d) $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im}\, g$ p.p.

$\Rightarrow \int \mathrm{Re} f = \int \mathrm{Re}\, g$ et $\int \mathrm{Im} f = \int \mathrm{Im}\, g$

$\Rightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

- <u>Théorème de convergence dominée</u> (TCD)

$(E, \mathcal{A}, \mu)$. Suite $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, \mathcal{A}, \mu)$.

On fait les hypothèses :

1) $\exists f$ mesurable réelle (ou complexe) telle que

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) \quad \mu\text{-p.p.}$$

2) il existe $g \in \mathcal{L}^1_+(E, \mathcal{A}, \mu)$, telle que

$$\forall n, \quad \underline{|f_n(x)| \leq g(x)} \quad \mu\text{-p.p.}$$

(g <u>domine</u> les (f_n))

Alors la fonction $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E, \mathcal{A}, \mu)$, et on a les convergences :

$$\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} \int f \, d\mu$$

$$\text{et} \quad \int |f - f_n| \, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Preuve : On commence en supposant que $|f_n| \leq g$ et $f_n \to f$ partout.

$\Rightarrow |f| \leq g \Rightarrow f$ est intégrable.

- $|f_n| \leq g$ et $|f| \leq g \Rightarrow |f - f_n| \leq 2g$

$$\Rightarrow 2g - |f - f_n| \geq 0 .$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$2g$$

Appliquons le Lemme de Fatou à la suite $(2g - |f - f_n|)$.

$$\int \left[\liminf_{n\to\infty} (2g - |f - f_n|)\right] d\mu \leq \liminf \int \underbrace{\underbrace{(2g - |f - f_n|)}_{\leq 2g} d\mu}_{\leq \int 2g \, d\mu}$$

$$\int 2g \, d\mu \leq$$

$$\liminf_n \int (2g - |f - f_n|) \, d\mu = \int 2g \, d\mu - \limsup_n \int |f - f_n| \, d\mu$$

$$\int 2g \, d\mu \leq \int 2g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu$$

$$\Rightarrow 0 \leq \limsup_{n\to\infty} \int |f - f_n| \, d\mu \leq 0$$

$$\Rightarrow \int |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

(a_n) suite réelle

$$\liminf_n (-a_n) = -\limsup_n (a_n)$$

. On suppose maintenant $f_n \longrightarrow f$ p.p

$|f_n| \leq g$ p.p.

$B_n = \{x \in E ; \ f_n(x) \leq g(x)\}$ "bons ensembles"

$B_{lim} = \{x \in E ; \ f_n(x) \longrightarrow f(x)\}$

Hyp : B_n^c et B_{lim}^c sont μ-négligeables $\Rightarrow$

Les B_n et B_{lim} sont mesurables.

Bon ensemble global : $\left(\bigcap_n B_n\right) \cap B_{lim} = B$

$N = B^c = \left(\bigcup_n B_n^c\right) \cup B_{lim}^c$ est négligeable.

$$\mu(B^c) \leq \sum_n \underbrace{\mu(B_n^c)}_{0} + \underbrace{\mu(B_{lim}^c)}_{0} = 0.$$

On modifie un peu les fonctions f_n et f :

$\tilde{f}_n = f_n \mathbb{1}_B \quad , \quad \tilde{f} = f \mathbb{1}_B$

$f_n = \tilde{f}_n$ p.p. et $f = \tilde{f}$ p.p. $\Rightarrow \int f_n = \int \tilde{f}_n$

$\int f = \int \tilde{f}$

$\int |f - f_n| = \int |\tilde{f} - \tilde{f}_n|$

On a : $\tilde{f}_n \longrightarrow f$ partout

$|\hat{f}_n| \leq g$ " "

$\rightarrow$ on applique la preuve à $(\tilde{f}_n)$.

$\square$

- À partir de $\int |f - f_n| d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ convergence $f_n \to f$ au sens $\mathcal{L}^1$.

$\Rightarrow \underbrace{\left| \int f d\mu - \int f_n d\mu \right|}_{\hookrightarrow 0} = \left| \int (f - f_n) d\mu \right| \leq \underbrace{\int |f - f_n| d\mu}_{\to 0}$

On a montré $\left.\begin{array}{l} f_n \longrightarrow f \quad p.p. \\ \text{et } |f_n| \leq g \quad p.p \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \longrightarrow f$ au sens $\mathcal{L}^1$.

<u>Exercice</u> : Reprendre les 3 exemples de suites (f_n) pour lesquelles le Lemme de Fatou était une inégalité stricte.

A-t-on alors $\left\{\begin{array}{l} f_n \longrightarrow f \text{ ?} \\ |f_n| \leq g \text{ pour une certaine } g \in \mathcal{L}^1_+ \text{ ?} \end{array}\right.$