Intégration et Probabilités

Cours n° 4

7 / 03 / 2024

USTC

S. Nonnenmacher

Fonctions mesurables

mesurable → espace E
→ ensemble A
→ fonction

Déf : $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ 2 espaces mesurables. Alors une application $f : E \to F$ est dite mesurable si :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}.$$

Si E et F sont des espaces topologiques munis de leurs tribus de Borel, alors on dit que f est borélienne (= mesurable par rapport aux 2 tribus boréliennes).

Rappel : entre 2 espaces topologiques, une fonction f est continue si, $\forall V \subset F$ ouvert, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.

Exemple de l'introduction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec tribus de Borel

On regardait les images réciproques $f^{-1}(\underbrace{[y_{k-1}, y_k[}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}) = \underbrace{A_k}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$

Proposition La composée de 2 fonctions mesurables est mesurable

$$\begin{tikzcd} (E, \mathcal{A}) \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & (F, \mathcal{B}) \arrow[r, "g"] & (G, \mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

$$\forall C \in \mathcal{C}, \quad (g \circ f)^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(\overbrace{g^{-1}(\underset{\in \mathcal{C}}{C})}^{\in \mathcal{B}})}_{\in \mathcal{A}}$$

Proposition : Supposons que $\mathcal{B}$ est engendrée par une sous-famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. ($\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$). Alors, pour vérifier que $f : E \to F$ est mesurable, il suffit de vérifier que $\forall B \in \mathcal{C}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

<u>Preuve</u> : on définit la classe des "bons éléments" de $\mathcal{B}$

$$\mathcal{G} := \{ B \in \mathcal{B} \,;\; f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \}.$$

On sait que $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$. On veut montrer que $\mathcal{G} = \mathcal{B}$. Il suffit de montrer que $\mathcal{G}$ est une tribu.

i) $f^{-1}(F) = E \in \mathcal{A} \Rightarrow F \in \mathcal{G}$.

ii) Si $B \in \mathcal{G}$, alors $f^{-1}(B^c) = (\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{A}})^c \in \mathcal{A} \Rightarrow B^c \in \mathcal{G}$.

partition de l'ensemble image $F = B \sqcup B^c$

$$\Rightarrow E = f^{-1}(F) = f^{-1}(B) \sqcup f^{-1}(B^c)$$

iii) $(B_n)_{n \geq 0}$ suite dans $\mathcal{G}$, alors

$$f^{-1}\left(\bigcup_n B_n\right) = \bigcup_n \underbrace{f^{-1}(B_n)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_n B_n \in \mathcal{G}.$$

$\Rightarrow \mathcal{G}$ est une tribu, contenant la famille $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{G}$ contient $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$.

$\Rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{B}$.

$\Rightarrow f$ est mesurable. $\square$

<u>Corollaire</u> : $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les $\{]\alpha, +\infty[\,, \alpha \in \mathbb{R} \}$

$\Rightarrow$ pour montrer que f est mesurable, il suffit de vérifier que

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}( ]\alpha, +\infty[ ) \in \mathcal{A}$.

<u>Corollaire</u> : Si E, F sont des espaces topologiques munis de leurs tribus de Borel, alors une application $f : E \to F$ continue est aussi mesurable (entre les tribus $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(F)$). (f est borélienne).

Preuve : f continue $\Rightarrow$ $\forall V$ ouvert de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E
$\Rightarrow \in \mathcal{B}(E)$

$$\sigma(\{\text{ouverts de } F\}) = \mathcal{B}(F)$$

Corollaire ci-dessus $\Rightarrow$ $\forall B \in \mathcal{B}(F)$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(E)$.
$\Rightarrow$ f borélienne. $\square$.

- <u>Tribu définie par une famille de fonctions</u>

$\mathcal{F}$ = famille de fonctions $f : E \to \mathbb{R}$. Y a-t-il une tribu $\mathcal{A}$ sur E, telle que toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}$ sont mesurables $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

<u>Prop</u> : Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions $f : E \to \mathbb{R}$. Alors il existe une tribu minimale $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ sur E, telle que toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}$ sont mesurables.

<u>Preuve.</u> Considérons la famille de sous-ensembles de E :

$$R_{\mathcal{F}} = \{ f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \subset E \ ; \ \alpha \in \mathbb{R}, \ f \in \mathcal{F} \} .$$

On pose $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \sigma(R_{\mathcal{F}})$.

$\forall f$ et α, $f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ $\Rightarrow$ f est $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$-mesurable

$\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est la + petite tribu ayant cette propriété : toute tribu $\mathcal{T}$ ayant cette propriété doit contenir tous les ensembles $f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$.
$R_{\mathcal{F}}$

$\Rightarrow$ elle contient aussi $\sigma(R_{\mathcal{F}})$.

<u>Ex :</u> $E = F = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On cherche $\mathcal{T}$ telle que $\forall f \in \mathcal{F}$,

$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

La tribu $\mathcal{T}$ minimale ayant cette propriété est la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Preuve : $\forall\ ]a,b[$, il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue t.q.

$$f^{-1}(]-\infty, 0[) =]a,b[.$$

$\Rightarrow$ $]a,b[$ doit appartenir à la tribu $\mathcal{A}$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{A} \supset \sigma(\{]a,b[\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On sait que si $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors les f continues sont mesurables.

$\Rightarrow$ la tribu minimale rendant les f continues mesurables est la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Opérations sur les fonctions mesurables

$\underbrace{f_1, f_2}_{\text{fonctions scalaires}} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ fonction vectorielle

$$f = \underbrace{(f_1, f_2)}_{\text{application produit}} : E \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Prop°: $f_1 : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (F_1, \mathcal{B}_1)$ et $f_2 : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (F_2, \mathcal{B}_2)$ deux fonctions mesurables. Alors l'application produit :

$$f : (E, \mathcal{A}) \longmapsto (F_1 \times F_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2), \quad \text{définie par}$$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

est aussi mesurable.

La réciproque est vraie : si f est mesurable, alors f_1 et f_2 sont mesurables.

composantes de f.

Preuve : la tribu $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ est engendrée par la famille des <u>pavés mesurables</u> $\mathcal{C} = \{ \underbrace{B_1 \times B_2}_{\text{pavé mesurable}} ; B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2 \}$

$\Rightarrow$ pour montrer que f est mesurable, il faut vérifier que toutes les $f^{-1}(B_1 \times B_2)$ sont $\mathcal{A}$-mesurables.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(B_1 \times B_2) &= \{x \in E ;\ f(x) \in B_1 \times B_2\} \\
&= \{x \in E ;\ (f_1(x), f_2(x)) \in B_1 \times B_2\} \\
&= \{x \in E ;\ f_1(x) \in B_1 \text{ et } f_2(x) \in B_2\} \\
&= \{x \in E ;\ f_1(x) \in B_1\} \cap \{x \in E ;\ f_2(x) \in B_2\} \\
&= \underbrace{f_1^{-1}(B_1)}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{f_2^{-1}(B_2)}_{\in \mathcal{A}} \quad \in \mathcal{A}.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ f est mesurable $\mathcal{A} \to \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$.

Inverse : supposons que f est mesurable.

$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1$, $\quad f^{-1}(\underbrace{B_1 \times F_2}_{\in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2}) = f_1^{-1}(B_1) \cap \underbrace{f_2^{-1}(F_2)}_{E} = \underbrace{f_1^{-1}(B_1)}_{\in \mathcal{A}}$

$\Rightarrow$ f_1 est mesurable $\mathcal{A} \to \mathcal{B}_1$.

Idem pour f_2.

Corollaire $f, g : (E, \mathcal{A}) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 2 fonctions mesurables.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions suivantes sont mesurables :

$\alpha f + \beta g + \gamma f g$; $f^+ = \max(f, 0)$ (partie positive de f)

$f^- = \max(-f, 0)$ (partie négative de f)

→ l'espace des fonctions mesurables à valeurs réelles forme une algèbre (= espace vectoriel + multiplication)

Preuve :

$x \longmapsto (f(x), g(x))$ mesurable $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

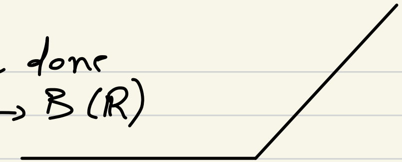
$E \longrightarrow \mathbb{R}^2$

L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, donc mesurable

$(a, b) \longmapsto \alpha a + \beta b + \gamma a b$ $\qquad \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

→ La composée des 2 applications est mesurable $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \max(a,0) \end{array}$$ est continue, donc mesurable $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$



$\Rightarrow f^+$ est mesurable

$a \longmapsto \max(-a, 0)$ est continue...

$\Rightarrow f^-$ est mesurable. $\square$

Suites de fonctions

$f_n : E \to \mathbb{R}$. On veut autoriser les fonctions à prendre les valeurs $+\infty$ ou $-\infty$.

$\to$ on étend $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, la droite réelle achevée.

$f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

$\overline{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $[-1, 1]$, par exemple à travers la bijection $x \longmapsto \tanh(x)$.

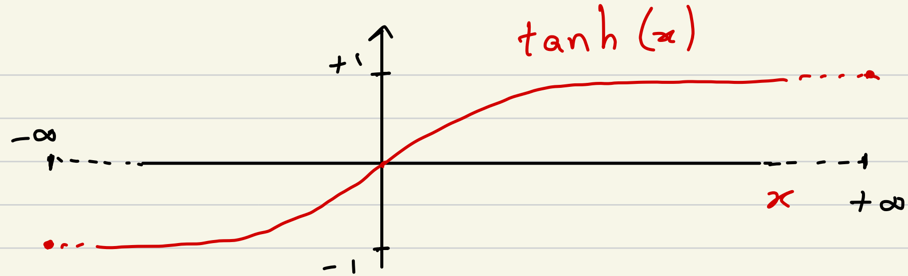
topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$,

induit les ouverts

$]a,+\infty] \neq]a,+\infty[$

$[-\infty, a[$

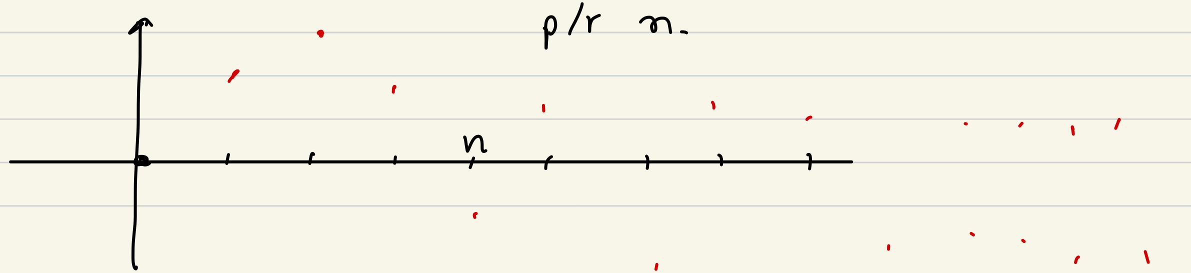
$\rightsquigarrow \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$



Limite sup et Limite inf d'une suite réelle.

$(a_n)_{n\geq 0}$ suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\downarrow \underbrace{\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)}_{\text{suite décroissante p/r } n.} = \inf_{n\geq 0}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$$



$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\uparrow \underbrace{\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)}_{\text{suite } \uparrow} = \sup_{n\geq 0}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

$\limsup_n a_n$ = la plus grande valeur d'adhérence de la suite (a_n).

$\liminf_n a_n$ = " " petite " " " .

Si $(a_n)_{n\geq 0}$ a une limite, alors $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$.

- En général $\limsup a_n \geq \liminf a_n$.
- $\limsup a_n$ et $\liminf a_n$ sont dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Prop^o Soit (f_n) suite de fonctions mesurables $(E,\mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$

Alors les fonctions suivantes sont mesurables :

$$\sup_{n\geq 0} f_n \;;\quad \inf_{n\geq 0} f_n \;;\quad \limsup_{n\to\infty} f_n \;;\quad \liminf_{n\to\infty} f_n .$$

En particulier, si $\forall x,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \Rightarrow f = \lim_{n\to\infty} f_n$ (convergence simple), alors la limite f est mesurable.

- Suite (f_n) quelconque ; le sous-ensemble de E :

$L = \{x \in E ;\ f_n(x)$ admet une limite lorsque $n \to \infty\}$ est mesurable.

Preuve :

- $f := \inf_n f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$. $\quad \forall x \in E,\ f(x) = \inf_{n\geq 0} (f_n(x))$

Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}([-\infty, \alpha[)$ est mesurable.

$$\underset{x}{\overset{\Psi}{}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) < \alpha$$

$$\inf_n f_n(x) < \alpha$$

$$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } f_{n_0}(x) < \alpha$$

$$\underbrace{f^{-1}([-\infty, \alpha[)}_{\in \mathcal{T}} = \bigcup_{n_0 \geq 0} \{x \in E ;\ f_{n_0}(x) < \alpha\} = \underbrace{\bigcup_{n_0 \geq 0} \underbrace{f_{n_0}^{-1}([-\infty, \alpha[)}_{\in \mathcal{T}}}_{\in \mathcal{T}}$$

$\Rightarrow \inf f_n$ est mesurable.

$\sup_n f_n = - \inf_n (-f_n)$.

$g_n = \sup_{k \geq n} f_k$ mesurable

$\limsup_{n \to \infty} f_n = \inf_n g_n$ mesurable

$x \in L \iff \limsup_{n \to \infty} f_n(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$

$g(x) := \limsup_n f_n(x) - \liminf_n f_n(x)$ est mesurable

$\forall x, \quad g(x) \geq 0$

$g(x) = 0 \iff x \in L$

$\Rightarrow L = g^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{T}$ car g est mesurable.

$\square$

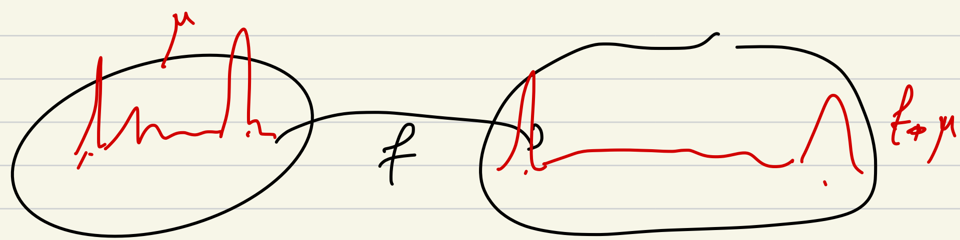
· Transport d'une mesure par une fonction.

Déf°: $f : (\overset{\mu}{E}, \mathcal{A}) \longrightarrow (\overset{f_*\mu}{F}, \mathcal{B})$ application mesurable.

Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

On peut définir la mesure image de μ par f, notée $f_*\mu$ (parfois $f(\mu)$) comme ceci :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \qquad (f_*\mu)(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right).$$



Exercice : vérifier que $f_*\mu$ est bien une mesure sur $(F, \mathcal{B})$.

(on utilise $\mu\left(f^{-1}\left(\bigsqcup_n B_n\right)\right) = \sum_n \bigsqcup_n \mu\left(f^{-1}(B_n)\right)$

$f^{-1}(\phi) = \phi \Rightarrow f_*\mu(\phi) = 0$

- $\underbrace{f_*\mu(F)}_{\text{masse totale de } f_*\mu} = \mu(f^{-1}(F)) = \mu(E)$ masse totale de μ

- il est possible que μ soit σ-finie, mais que $f_*\mu$ ne le soit pas.

Ex: λ_1 mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (σ-finie).

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurables.

Décrire la mesure $f_*\lambda_1$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = 0$, $\forall x$. $\quad f_*\lambda_1 = ?$ $\quad \sigma$-finie ?
2. $f(x) = 2x$, $\forall x \to f_*\lambda_1$? $\quad \sigma$-finie ?

Intégration d'une fonction par rapport à une mesure

Intégration de Lebesgue ($\neq$ intégration de Riemann).

fonctions élémentaires : fonctions étagées.

intégrale de fonctions étagées $\rightsquigarrow$ intégrale de fonctions mesurables positives.

$\rightsquigarrow$ notion de fonction intégrable (qu'on peut intégrer).

On considère des fonctions à valeurs réelles.

3 résultats centraux de la théorie de Lebesgue :

- thme de convergence monotone
- Lemme de Fatou
- thme de convergence dominée.

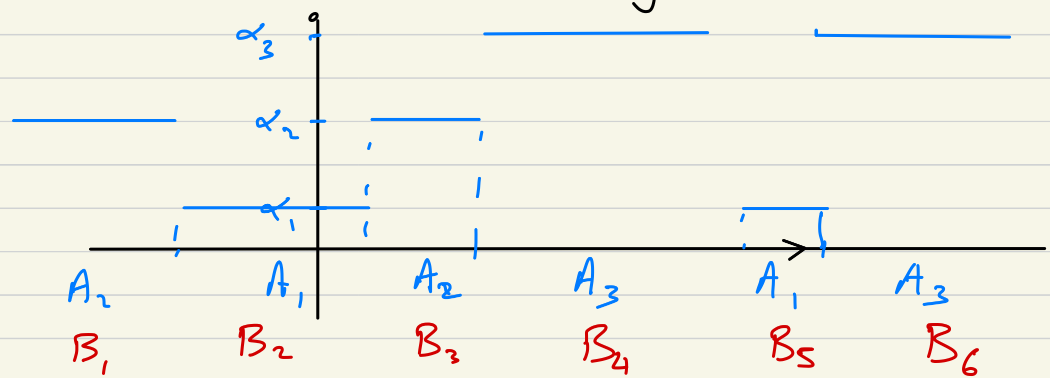
Intégration d'une fonction mesurable positive

Déf (Fonction étagée)

$(E, \mathcal{A})$. $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite <u>étagée</u> si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, et $\forall j = 1, \dots, n$, $A_j = f^{-1}(\{\alpha_j\})$ est $\mathcal{A}$-mesurable.

$$\underline{f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x)}, \quad A_j \in \mathcal{A} \text{ et } E = \bigsqcup_{j=1}^{n} A_j .$$

écriture canonique de ma fonction étagée.



Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

<u>Déf°</u> Supposons que la fonction étagée est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Alors l'intégrale de f par rapport à la mesure μ est :

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \mu(A_j) \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

$\alpha_j \geq 0$

$+\infty \geq \mu(A_j) \geq 0$

Convention : $0 \times (+\infty) = 0$.

Si $\mu(A_j) = +\infty$, $\begin{cases} \alpha_j > 0 \Rightarrow \alpha_j \, \mu(A_j) = +\infty \\ \alpha_j = 0 \Rightarrow \alpha_j \, \mu(A_j) = 0 \end{cases}$

- Ecritures non canoniques d'une fonction étagée :

$$E = \bigsqcup_{j=1}^{N} B_j, \quad B_j \in \mathcal{A}.$$

$(\beta_1, \dots, \beta_N)$ valeurs réelles pas forcément différentes

$$\Longrightarrow \quad f = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \mathbb{1}_{B_j} \quad \text{est une fonction étagée.}$$

Pour retrouver la représentation canonique, il faut regrouper les B_j qui ont le même β_j

$$A_i = \bigsqcup_{j \in I(\alpha_i)} B_j \qquad I(\alpha_i) = \{ j = 1, \dots, N \, ; \, \beta_j = \alpha_i \}$$

$$\mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j \in I(\alpha_i)} \mathbb{1}_{B_j} \qquad \forall j \in I(\alpha_i), \ \beta_j = \alpha_i .$$

$$\mu(A_i) = \sum_{j \in I(\alpha_i)} \mu(B_j)$$

$$\rightarrow \int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \, \mu(B_j)$$

Prop° (Linéarité et positivité de l'intégrale des fonctions étagées ≥ 0)

f, g 2 fonctions étagées ≥ 0 sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int \underbrace{(af + bg)}_{\text{étagée } \geq 0} d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu$.

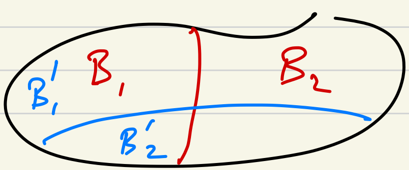
2. Si $f \leq g$, alors $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Preuve : $f = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$, $g = \sum_{i=1}^{N'} \beta'_i \mathbb{1}_{B'_i}$

représentations de f et g.

$E = \bigsqcup_{i=1}^{N} B_i$ $\qquad E = \bigsqcup_{i=1}^{N'} B'_i$

Partition raffinée $E = \bigsqcup_{i=1}^{N} \bigsqcup_{j=1}^{N'} \underbrace{(B_i \cap B'_j)}_{C_{ij}} = \bigsqcup_{i,j} C_{ij}$



$f = \sum_{i,j} \beta_i \mathbb{1}_{C_{ij}}$

$g = \sum_{i,j} \beta'_j \mathbb{1}_{C_{ij}}$

$\Rightarrow af + bg = \sum_{ij} \gamma_{ij} \mathbb{1}_{C_{ij}}$, avec $\gamma_{ij} = a\beta_i + b\beta'_j \geq 0$

fonction étagée ≥ 0.

$$\int (af+bg)\,d\mu = \sum_{ij} \gamma_{ij}\, \mu(C_{ij}) = \sum_{ij} (a\beta_i + b\beta'_j)\, \mu(C_{ij})$$

$$= a \sum_{ij} \beta_i\, \mu(C_{ij}) + b \sum_{ij} \beta'_j\, \mu(C_{ij})$$

$$= a \sum_i \beta_i \underbrace{\sum_j \mu(C_{ij})}_{\mu(B_i)} + b \sum_j \beta'_j \underbrace{\sum_i \mu(C_{ij})}_{\mu(B'_j)}$$

$$= a \int f\,d\mu + b \int g\,d\mu.$$

2. $f \geq g \Rightarrow f - g$ est étagée positive, et

$$f = g + \overbrace{(f-g)}^{\geq 0}$$

$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu + \int (f-g)\,d\mu \Rightarrow \int f\,d\mu \geq \int g\,d\mu.$$