Intégration et Probabilités

Cours n° 3

USTC

4/03/2024

Question : $(E_1, \mathcal{O}_1)$ 2 espaces topologiques
$(E_2, \mathcal{O}_2)$
topologies

$$\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) \subset \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$$

avec la topologie produit.

- Si E_1 et E_2 admettent des bases dénombrables pour leur topologie, alors on a égalité

$$\mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) = \mathcal{B}(E_1 \times E_2).$$

base de la topologie : ensemble d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ tels que

$\forall U$ ouvert, $\exists J \subset I$ tq. $U = \bigcup_{i \in J} U_i$.

$(U_i^{(1)})$ $\forall U$ ouvert de $E_1 \rightarrow \exists J_1 \subset I_1$, $U = \bigcup_{j \in J_1} U_j$

$(V_i^{(2)})$ $\forall V$ – $E_2 \rightarrow \exists J_2 \subset I_2$ $V = \bigcup_{j \in J_2} V_j$.

$\Longrightarrow$ $E_1 \times E_2$ est aussi à base dénombrable.

$\forall U$ ouvert de $E_1 \times E_2$, $\exists K \subset I_1 \times I_2$ t.q.

$$U = \bigcup_{(i,j) \in K} U_i \times V_j.$$

pavé ouvert

$(U_i \times V_j)_{\substack{i \in I_1 \\ j \in I_2}}$ forment une base de $E_1 \times E_2$.

I_1, I_2 dénombrables $\Rightarrow I_1 \times I_2$ dénombrable $\Rightarrow K$ dénombrable.

$\forall i,j$, $U_i \times V_j \in \mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2)$

$\Rightarrow \bigcup_K U_i \times V_j \in$ " " ,

$\Rightarrow$ tous les ouverts de $E_1 \times E_2 \in \mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2)$

$\Rightarrow \mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2) \supset \mathcal{B}(E_1 \times E_2)$.

$\rightarrow$ pour un contre-exemple, trouver des espaces topologiques n'ayant pas de base dénombrable. $\Longrightarrow$ non séparable ?

ex: espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornées, avec la topologie engendrée par la norme sup : $\|f\|_{sup} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Propé : l'espace $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ n'est pas séparable.

$\Rightarrow$ n'admet pas de base dénombrable.

$\nexists \, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonctions bornées qui soit dense dans $B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ Si $E = B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec la topologie de la norme sup

Alors $\mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E) \subsetneq \mathcal{B}(E \times E)$. $\square$

⚠ espaces de fonctions $L^p(\mathbb{R})$: sont séparables.

- **Exemples de mesure :**

1. $E = \mathbb{N}$, tribu complète $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to$ mesure de comptage $\mu(A) = \# A \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.

   ex : $B_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} \to \mu(B_n) = +\infty \quad \forall n$.

   $\bigcap_{n \geq 0} B_n = \emptyset, \quad \mu(\emptyset) = 0$.

$0 = \mu\left(\bigcap_{n\geq 0} B_n\right) \neq \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = +\infty$

- $\forall E$, avec sa tribu complète, μ est bien définie sur cette tribu. (si E indénombrable $\Rightarrow$ peu intéressante).

2. $(E, \mathcal{A})$, $x \in E$. Mesure de Dirac au point x :

   δ_x : $\quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad \delta_x(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$.

Dirac voulait définir une "fonction généralisée" telle que

$(E = \mathbb{R})$ $\quad \delta(y) = 0, \ \forall y \neq x.$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \delta(y)\, dy = 1$

3. μ_1, μ_2 définies sur une même tribu $\Rightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \overline{\mathbb{R}_+}$,

$\mu = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$ est aussi une mesure.

Si $\alpha_1 = +\infty$ $\quad \alpha_1 \mu_1 (A) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \mu_1(A) > 0 \text{ ou } \mu_1(A) = +\infty \\ 0 \text{ si } \mu(A) = 0 \end{cases}$

"$+\infty . 0 = 0$".

4. Mesure de Lebesgue sur $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}, \text{ notée } \lambda_1, \\ \mathbb{R}^d, \ \text{--} \ \lambda_d \end{array} \right.$ donne la longueur des ensembles mesurables.

$\forall \ a < b, \qquad \lambda_1 (]a,b[) = b - a.$

(Notations : λ_1, dL, m, dx)

Def$^{\circ}$ 1. Une mesure μ est dite *finie* si $\mu(E) \begin{cases} < \infty \\ \text{est finie.} \end{cases}$

$\mu(E)$ est la masse totale de μ.

Si $\mu(E) = 1$, μ est une mesure de probabilité.

2. μ est dite σ-finie s'il existe une suite croissante $(E_n)_{n\geq 0}$ de sous-ensembles mesurables, tels que $E = \bigcup_{n\geq 0} E_n$, et

$\forall n \geq 0, \quad \mu(E_n) < \infty$.

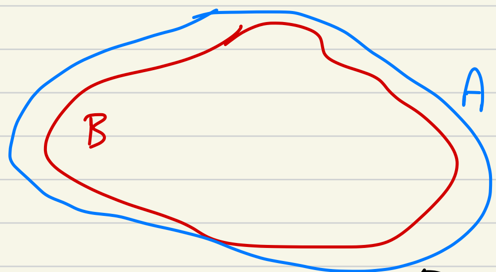
ex : mesure de comptage sur $\mathbb{N}$: $E_n = \{0, 1, \dots n\} = [\![0, n]\!]$

. Si E est indénombrable $\Rightarrow$ la mesure de comptage sur E n'est pas σ-finie.

3. Un point $x \in E$ est appelé un *atome* de la mesure μ si $\{x\} \in \mathcal{A}$, et $\mu(\{x\}) > 0$.

4. Une mesure sans atome est appelée mesure diffuse.

5. Un sous-ensemble $B \subset E$ tel qu'il existe $A \supset B$ mesurable et tel que $\mu(A) = 0$, est dit μ-négligeable.



$\mu(A) = 0$

B n'est pas forcément élément de la tribu $\mathcal{A}$.

Si tous les ensembles μ-négligeables sont dans la tribu, on dit que cette tribu est μ-complète.

$\forall A \in \mathcal{A}$ avec $\mu(A) = 0 \Rightarrow$ tous les sous-ensembles de A sont aussi dans la tribu.

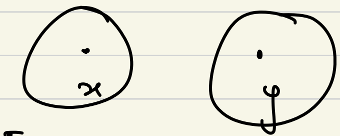
$(E, \mathcal{A}, \mu) \longrightarrow$ on pourra compléter $\mathcal{A}$ en une tribu μ-complète, notée $\overline{\mathcal{A}}$.

$$\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}.$$

6. E espace topol., $\mathcal{B}(E)$ tribu de Borel, μ mesure borélienne.

μ est dite <u>localement finie</u> si tout point $x \in E$ admet un voisinage V_x tel que $\mu(V_x) < \infty$.

Si E est localement compact et séparé (ex: $\mathbb{R}^d$), μ local^{t} compacte $\iff$ tous les compacts de E sont de mesure finie.



Ex: λ_1 sur $\mathbb{R}$ (mesure de Lebesgue) est diffuse:

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1(\{x\}) = 0$

$\forall A \subset \mathbb{R}$ dénombrable $=$ $A = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, $\lambda_1(A) = 0$.

$\Rightarrow \quad \lambda_1(\mathbb{Q}) = 0.$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0.$$

. Il existe aussi des sous-ensembles indénombrables de $\mathbb{R}$, ayant une mesure de Lebesgue nulle.

Ex: ensemble de Cantor K sur $[0,1]$: l'ensemble des

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{3^n}, \quad \text{avec } k_n \in \{0,2\}$$

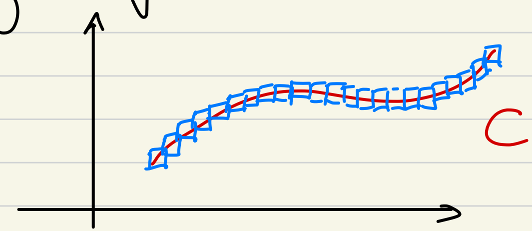
$$x = 0.k_1 k_2 k_3 \ldots \quad \text{décomposition en base } 3.$$

Cet ensemble vérifie $\lambda_1(K) = 0$.

Ex: Sur $\mathbb{R}^2$, C courbe lisse de longueur finie :

Mesure de Lebesgue bidimensionnelle λ_2

Alors $\lambda_2(C) = 0$



• Lemme de Classe Monotone

Déf : Une famille $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E)$ est appelée une classe monotone si :

i) $E \in \mathcal{M}$

ii) Si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$.

iii) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ forment une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$, alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Remarque : i) ii) $\Rightarrow$ Si $A \in \mathcal{M}$, alors $A^c \in \mathcal{M}$.

iii) est moins contraignante que iii) des tribus.

$\Rightarrow$ toute tribu $\mathcal{T}$ est aussi une classe monotone.

__Lemme__ Une classe monotone $\mathcal{M}$ est une tribu ssi $\mathcal{M}$ est stable par intersections finies :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}, \quad A \cap B \in \mathcal{M}.$$

__Preuve :__ $\Rightarrow$ évident : toute tribu est stable par intersections dénombrables, donc aussi par intersections finies.

$\Leftarrow$ $\mathcal{M}$ cl. monot. invariante par intersections finies.

$\Rightarrow$ invariante par unions finies.

Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ suite quelconque d'éléments de $\mathcal{M}$.

$\rightarrow$ on fabrique la suite $A_0 = B_0$, $A_1 = A_0 \cup B_1 \in \mathcal{M}$,

$A_2 = A_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}$ ... $A_{n+1} = A_n \cup B_{n+1}$, ...

$\Rightarrow A_n \supset A_{n-1} \Rightarrow (A_n)$ suite croissante.

$\forall N, \quad \bigcup_{n=0}^{N} A_n = \bigcup_{n=0}^{N} B_n$

iii) $\Rightarrow \underbrace{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n}_{= \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n} \in \mathcal{M} \qquad \Rightarrow \mathcal{M}$ est une tribu.

- Si $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ classes monotones sur E, alors $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ est aussi une cl. monotone.

$\rightsquigarrow$ pour une famille quelconque $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on peut définir la plus petite cl. monot. contenant $\mathcal{C}$:

$$\underbrace{\mathcal{M}(\mathcal{C})}_{\text{cl. monot. engendrée par } \mathcal{C}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ cl. monot.} \\ \mathcal{M} \supset \mathcal{C}}} \mathcal{M} \quad \subset \underbrace{\sigma(\mathcal{C})}_{\text{tribu engendrée par } \mathcal{C}.}$$

Théorème (Lemme de classe monotone)

> Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ est une famille stable par intersections finies, alors la classe monot. engendrée par $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, est égale à la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C})$.

Preuve : on avait déjà $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{C})$. On aura égalité ssi on montre que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une tribu.

$$\mathcal{C} \subset \underbrace{\mathcal{M}(\mathcal{C})}_{\text{tribu}} \Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C}) \supset \sigma(\mathcal{C}).$$

À montrer : $\mathcal{C}$ stable par $\cap$ finies $\Rightarrow$ $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ stable par $\cap$ finies.

. $A \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$ quelconque. On définit la famille

$$\boxed{\mathcal{M}_A := \{ B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \, ; \, A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \}}$$

On va montrer que $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}(\mathcal{C})$ $\rightarrow$ on aura montré la stabilité de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ par intersection avec A

1. Commençons par prendre $A \in \mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}$ stable par intersections $\Rightarrow \forall B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C} \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

$\Rightarrow \mathcal{M}_A$ contient tous les $B \in \mathcal{C}$: $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_A$.

Montrons que $\mathcal{M}_A$ est forcément une cl. monot.

i) $A \cap E = A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \Rightarrow E \in \mathcal{M}_A$.

ii) $B \subset B'$ dans $\mathcal{M}_A$. $\Rightarrow \underbrace{(A \cap B)}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{C})} \subset \underbrace{(A \cap B')}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{C})}$

$\Rightarrow (A \cap B') \setminus (A \cap B) \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$= A \cap (B' \setminus B) \in$

$\Rightarrow B' \setminus B \in \mathcal{M}_A$. $\rightarrow$ le 2ᵉ axiome des cl. mont. est OK.

iii) $(B_n)_{n \geq 0}$ suite $\uparrow$ dans $\mathcal{M}_A$.

$\Rightarrow A \cap B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $\forall n.$, suite $\uparrow$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{C})$

$\Rightarrow \bigcup_{n\geq 0}(A\cap B_n) \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$= A \cap \underbrace{(\bigcup_n B_n)}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{C})} \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$\Rightarrow \bigcup_{n\geq 0} B_n \in \mathcal{M}_A.$ 3^e axiome est OK

$\Rightarrow$ $\mathcal{M}_A$ est une cl. monotone qui contient $\mathcal{C}$, et $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

$\Rightarrow \mathcal{M}_A = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

$\underset{B}{\forall A} \in \mathcal{C}$, $\underset{A'}{\forall B} \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $\underset{B\,\cap\, A'}{A\cap B} \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

2. On veut élargir cette propriété à tous les $A \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

$A' \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$\rightarrow \mathcal{M}_{A'} = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}),\ A'\cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$

$\forall A' \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, $\forall B \in \mathcal{C}$, $A'\cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{M}_{A'} \Rightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{M}_{A'}$.

Même preuve montre que $\mathcal{M}_{A'}$ est une cl. monot. $\subset \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

$\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_{A'} \Rightarrow \mathcal{M}_{A'} = \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

$\forall A' \in \mathcal{M}(\mathcal{C}), \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}), \quad A' \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$.

$\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C})$ stable par intersection de 2 de ses éléments.

$\Rightarrow$ stable par intersections finies.

Lemme plus haut $\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une <u>tribu</u>. $\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

$\square$

<u>Applications du Lemme de cl. monot.</u>

On va pouvoir identifier 2 mesures μ_1, μ_2 si elles sont égales sur une sous-famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ bien choisie.

<u>Corollaire</u> Soit μ, ν 2 mesures sur $(E, \mathcal{A})$. Supposons qu'il existe une famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ <u>stable par intersections finies</u>, et telle que <u>$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$</u>, et telle que <u>$\forall A \in \mathcal{C}, \quad \mu(A) = \nu(A)$</u>.

Supposons que μ, ν satisfont au moins une des 2 hypothèses :

1. $\mu(E) = \nu(E) < \infty$
2. $\mu(E)$ et $\nu(E)$ sont σ-finies par rapport à une même suite croissante $(E_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{C}$.

$$E = \bigcup_{n \geq 0} E_n, \quad \mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty, \quad \forall n.$$

Alors $\mu = \nu$ partout.

Preuve : μ, ν mesures finies, $\mu(E) = \nu(E) < \infty$.

$$\mathcal{G} := \{ A \in \mathcal{A} ; \mu(A) = \nu(A) \}$$ famille des "bons" éléments de $\mathcal{A}$.

Objectif : montrer que $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$.

On sait que $\mathcal{G} \supset \mathcal{C}$

On va montrer que $\mathcal{G}$ est une classe monotone $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Mais $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \underset{\text{th. cl. monot.}}{=} \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{A}$.

(i) $E \in \mathcal{G}$ puisque $\mu(E) = \nu(E) < \infty$.

(ii) $A \subset B$ dans $\mathcal{G}$ $\Rightarrow$ $\underset{=}{\mu(B\setminus A)} = \underset{=}{\mu(B)} - \underset{=}{\mu(A)}$ (cf. μ finie)

$\nu(B\setminus A) = \nu(B) - \nu(A)$ (cf. ν finie)

$\Rightarrow B\setminus A \in \mathcal{G}$.

(iii) (A_n) suite $\uparrow$ dans $\mathcal{G}$ $\Rightarrow$ $\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \lim_{n\to\infty}\uparrow \underset{=}{\mu(A_n)}$

$= \lim_{n\to\infty}\uparrow \nu(A_n)$

$= \nu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right)$

$\Rightarrow \bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{G}$.

Concl: $\mathcal{G}$ est une cl. monot. qui contient $\mathcal{C}$. $\Rightarrow \mathcal{G} \supset \mathcal{M}(\mathcal{C})$

$\mathcal{C}$ invar. par intersec. $\underset{\text{Th. cl. monot.}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.

$\Rightarrow \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$.

$\mu = \nu$ sur $\mathcal{A}$ entière.

2. μ, ν σ-finies associées à $(E_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{C}$.

Définissons $\forall n$, la mesure $\mu_n(A) := \mu(A \cap E_n)$, la restriction de μ à l'ensemble E_n. $\nu_n(A) := \nu(A \cap E_n)$

Vérifier que μ_n est bien une mesure finie.

$\forall A \in \mathcal{C}$, E_n est aussi dans $\mathcal{C} \Rightarrow A \cap E_n \in \mathcal{C}$.

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{C}$, $\mu_n(A) = \nu_n(A)$.

$\mu_n(E) = \nu_n(E)$
$\mu(E_n) = \nu(E_n)$

Appliquer le résultat du 1 à μ_n, ν_n

$\Rightarrow \mu_n = \nu_n$ sur $\mathcal{A}$.

$\forall A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A \cap E_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \uparrow \mu_n(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \uparrow \nu_n(A) = \nu(A)$

$A = \bigcup\limits_{n \geq 0} (A \cap E_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \uparrow (A \cap E_n)$

$\square$.

Exemple : Unicité de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

On sait que cette mesure doit prendre la valeur $(b-a)$ sur l'intervalle $]a,b[$.

$\mathcal{C} = \{\ ]a,b[\ ;\ a \leq b \text{ dans } \mathbb{R}\}$.

$\mathcal{C}$ est invariante par intersections

. $\mathcal{C}$ engendre les boréliens de $\mathbb{R}$: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Supposons que 2 mesures boréliennes μ, ν soient

- σ-finies, p/r à la suite $E_n =]-n,n[$, avec

$$\mu(]-n,n[) = \nu(]-n,n[) = 2n$$

- $\forall\ ]a,b[\in \mathcal{C}$, $\mu(]a,b[) = \nu(]a,b[) = b-a$.

Corollaire $\Rightarrow$ $\mu = \nu$.

Conclusion : il y a au plus une unique mesure borélienne telle que $\mu(]a,b[) = b-a$.

$\Rightarrow$ unicité de la mesure de Lebesgue.

<u>Exemple</u> : Fonction de répartition d'une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Soit μ mesure finie sur $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{C} = \{ \,]-\infty, a] \; ; \; a \in \mathbb{R} \}$$

$\mathcal{C}$ est invariant par intersection. $\quad \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ pour identifier la mesure μ, il suffit de connaître ses valeurs sur la classe $\mathcal{C}$, donc de connaître tous les

$$\{ \mu(]-\infty, a]) \; ; \; a \in \mathbb{R} \}$$

$\Leftrightarrow$ connaître la fonction de répartition de μ.

$$F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longmapsto \mu(]-\infty, a])$$

th. des probabilités

$\Rightarrow$ la fonction F_μ représente entièrement la mesure μ.