Université Paris-Saclay • M2 Analyse Modélisation Simulation

Introduction à la théorie spectrale (2015-2016, 1er semestre)

Stéphane Nonnenmacher

Examen final (20 novembre 2015)

Problème 1. Asymptotique semiclassique de la valeur propre fondamentale
Sur l'intervalle $J = [-1, 1]$ on considère un potentiel $V \in C^\infty(J)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour tout $h \in (0, 1]$ (le "paramètre de Planck"), on définit l'opérateur de Schrödinger

$$[A_h\psi](x) = -h^2 \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x)\,,$$

avec des *conditions de Dirichlet* sur le bord de J.

1. Rappeler le domaine $D(A_h) \subset L^2(J)$ sur lequel A_h définit un opérateur autoadjoint.
2. Montrer que pour tout $h \in (0, 1]$, l'opérateur A_h a un spectre purement discret et strictement positif.

   On appelle $E(h)$ la valeur propre la plus petite ("fondamentale") de A_h. On s'intéresse à son comportement dans la limite $h \searrow 0$ (*limite semiclassique*), en fonction des propriétés de V.
3. Etudier la monotonicité et la continuité de la fonction $h \mapsto E(h)$ sur $(0, 1]$.
4. On suppose que $V(x) > 0$ sur tout J. Montrer que pour un certain $c_0 > 0$ on a $E(h) \geq c_0$ pour tout $h \in (0, 1]$.
5. Supposons au contraire que $V(x) = 0$ sur un intervalle $[a, b] \subset J$, avec $a < b$. Montrer que pour un certain $c_1 > 0$, on a $E(h) \leq c_1 h^2$ pour tout $h \in (0, 1]$.
   (Indication : utiliser le laplacien de Dirichlet sur $[a, b]$)).
6. Supposons que $V(x) > 0$ presque partout sur J. On veut alors montrer que $E(h)/h^2 \to \infty$ lorsque $h \to 0$.
   (a) On va procéder par l'absurde, et supposer que $E(h)/h^2 \leq C$ pour tout $h \in (0, 1]$. Pour tout $h \in (0, 1]$ on note ψ_h une fonction propre normalisée associée à $E(h)$. Montrer que la famille $(\psi_h)_{h\in(0,1]}$ est bornée dans $H^1(J)$.
   (b) Montrer qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de paramètres de Planck, convergeant vers zéro lorsque $n \to \infty$, telle que ψ_{h_n} converge vers un certain $\psi_\infty \in L^2(J)$.
   (c) En déduire que
   $$\int_J V(x)\,|\psi_\infty(x)|^2\,dx = 0,$$
   et en tirer une contradiction. Conclure.

7. On suppose que V s'annule en (au moins) un point $x_0 \in \overset{\circ}{J}$.

   (a) Rappeller l'expression de la valeur propre fondamentale de l'oscillateur harmonique $H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ sur $L^2(\mathbb{R})$, et de la fonction propre associée.

   (b) Pour $h \in (0, 1]$ et $\omega > 0$, on appelle $H_{h,\omega} = -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 x^2$ l'oscillateur harmonique semiclassique de fréquence ω. Expliciter la valeur propre fondamentale de $H_{h,\omega}$ et la fonction propre associée.

   (c) En comparant A_h à un oscillateur harmonique semiclassique centré en x_0, montrer qu'il existe un $c_2 > 0$ tel que, pour tout $h \in (0, 1]$, la valeur propre $E(h) \leq c_2 h$.

Problème 2. Equation des ondes

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable, A un opérateur auto-adjoint sur $\mathscr{H}$, avec $A \geq 0$ et $\ker A = \{0\}$. On veut étudier les solutions de l'équation des ondes associée à A :

$$u''(t) + Au(t) = 0, \tag{1}$$

autrement dit les fonctions $u \in C^2(\mathbb{R}, \mathscr{H})$ telles que, pour tout $t \in \mathscr{H}$, $u(t) \in D(A)$ et $u(t)$ satisfait (1).

On définit les fonctions suivantes de $\lambda \in \mathbb{R}$, dépendant d'un paramètre $t \in \mathbb{R}$:

$$C_t(\lambda) = \cos(t\sqrt{\lambda}), \quad S_t(\lambda) = \frac{\sin(t\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}, \quad \forall \lambda \geq 0; \qquad C_t(\lambda) = S_t(\lambda) = 0, \quad \forall \lambda < 0.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ les opérateurs $C_t(A)$ et $S_t(A)$ sont bornés sur $\mathscr{H}$.
2. On se donne des *données initiales* $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(\sqrt{A})$, et on considère les fonctions
$$\varphi(t) = C_t(A)u_0, \qquad \psi(t) = S_t(A)u_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont dans $D(A)$.

   (b) Montrer que $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathscr{H})$, et que $\varphi'(t) = -AS_t(A)u_0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Montrer que $\psi \in C^1(\mathbb{R}, \mathscr{H})$, et que $\psi'(t) = C_t(A)u_1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (d) Montrer que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont deux solutions de (1). En déduire que $u(t) = \varphi(t) + \psi(t)$ est solution de (1), et préciser ses données initiales $u(0)$, $u'(0)$.
3. On veut montrer que $u(t)$ est l'unique solution de (1) ayant ces données initiales. Soit $w(t)$ une solution de (1) ayant les mêmes données initiales que $u(t)$.

   (a) Posons $v(t) = u(t) - w(t)$. Montrer l'identité
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}\langle v(t), Av(t)\rangle = \langle v'(t), Av(t)\rangle + \langle Av(t), v'(t)\rangle,$$
   où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ dénote le produit scalaire sur $\mathscr{H}$.

(b) Montrer que l'*énergie* de l'onde $v(t)$,

$$E(t) = \langle v'(t), v'(t) \rangle + \langle v(t), Av(t) \rangle \,,$$

est indépendante du temps.

(c) En déduire l'unicité de la solution u.

4. L'équation des ondes usuelle sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ consiste à prendre $A = A_c = -c^2 \frac{d^2}{dx^2}$ agissant sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$, avec $c > 0$ la vitesse du son.

   (a) Donner le domaine $D(A_c)$ afin que les conditions ci-dessus sur l'opérateur A_c soient toutes remplies.

   (b) On note $P_0 = -i \frac{d}{dx}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que P est essentiellement autoadjoint sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$, et donner le domaine de sa fermeture $\overline{P}_0 = P$.

   (c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, décrire explicitement l'action de l'opérateur e^{-iPt} sur $L^2(\mathbb{R})$.

   (d) Montrer que $C_t(A_c)$ s'exprime facilement en termes de l'opérateur P, et en déduire l'action explicite de $C_t(A_c)$ sur $u_0 \in D(A_c)$.

   (e) Montrer de même explicitement l'action de $S_t(A_c)$ sur $L^2(\mathbb{R})$.
   (Indication : utiliser le résultat de 2.(c)).