Rappels et notations sur les ensembles

Stéphane Nonnenmacher

1 Diverses notations sur les ensembles

1. On appellera X (ou E) l'ensemble global sur lequel nous travaillerons. L'ensemble des parties de E est noté $\mathscr{P}(X)$. Les parties (= sous-ensembles) de X sont notées A, B etc. "A est une partie de X" se note $A \subset X$ ou $X \supset A$.
2. On notera l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$, et $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Pour deux entiers $j \leq k$, on notera $[\![j, k]\!] = [j, k] \cap \mathbb{N}$ l'intervalle discret entre j et k.
3. Un ensemble X peut être :

a) vide, s'il ne contient aucun élément : $X = \emptyset$.

b) fini, s'il contient un nombre fini d'éléments : il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, où tous les x_i sont distincts. Autrement dit, il existe une bijection $i : [\![1, n]\!] \to X$. Rappelons que l'ordre des éléments d'un ensemble est indifférent : $\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$. Le cardinal de X, qu'on note $\#X$ ou $|X|$, est égal à n.

c) infini dénombrable s'il existe une bijection $i : \mathbb{N}^* \to X$. Autrement dit, les éléments de X peuvent être indicés par les entiers naturels : $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. Le choix de commencer le comptage par x_1 est une convention : on pourrait aussi prendre $X = \{x_0, x_1, \cdots\}$.

d) infini indénombrable, s'il n'existe pas d'application surjective $s : \mathbb{N}^* \to X$. *L'hypothèse du continu* consiste à dire qu'un ensemble infini indénombrable a au moins le cardinal du continu : il existe une *injection* $i : \mathbb{R} \to X$. Autrement dit, il n'existe pas d'infini "strictement plus gros que $\mathbb{N}$, et strictement plus petit que $\mathbb{R}$".

Exercice 1. Montrer que les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$ sont dénombrables.

4. Pour un ensemble d'indices I (qui peut être fini, dénombrable ou indénombrable), on note $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X, indexée par I. Si I est fini (respectivement dénombrable), on pourra alors noter $(A_j)_{j=1,\ldots,n}$ (respectivement $(A_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ ou $(A_j)_{j \geq 1}$).

2 Opérations sur les ensembles

La notation $a := b$ indiquera que la quantité a est définie par b. L'égalité ne provient pas du résultat d'un calcul ou d'un raisonnement, mais d'une définition.

La notation $\{x \in X \,;\, x \in A\}$ signifie "l'ensemble des tous les éléments x dans X qui satisfont la propriété "$x \in A$". Elle est équivalente aux notations $\{x \in X \,:\, x \in A\}$ ou $\{x \in X \,|\, x \in A\}$.

1. Union : $A \cup B := \{x \in X \,;\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Plus généralement, pour $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X (de cardinal quelconque),

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X \,;\, \text{il existe au moins un indice } i \in I \text{ tel que } x \in A_i\}\,.$$

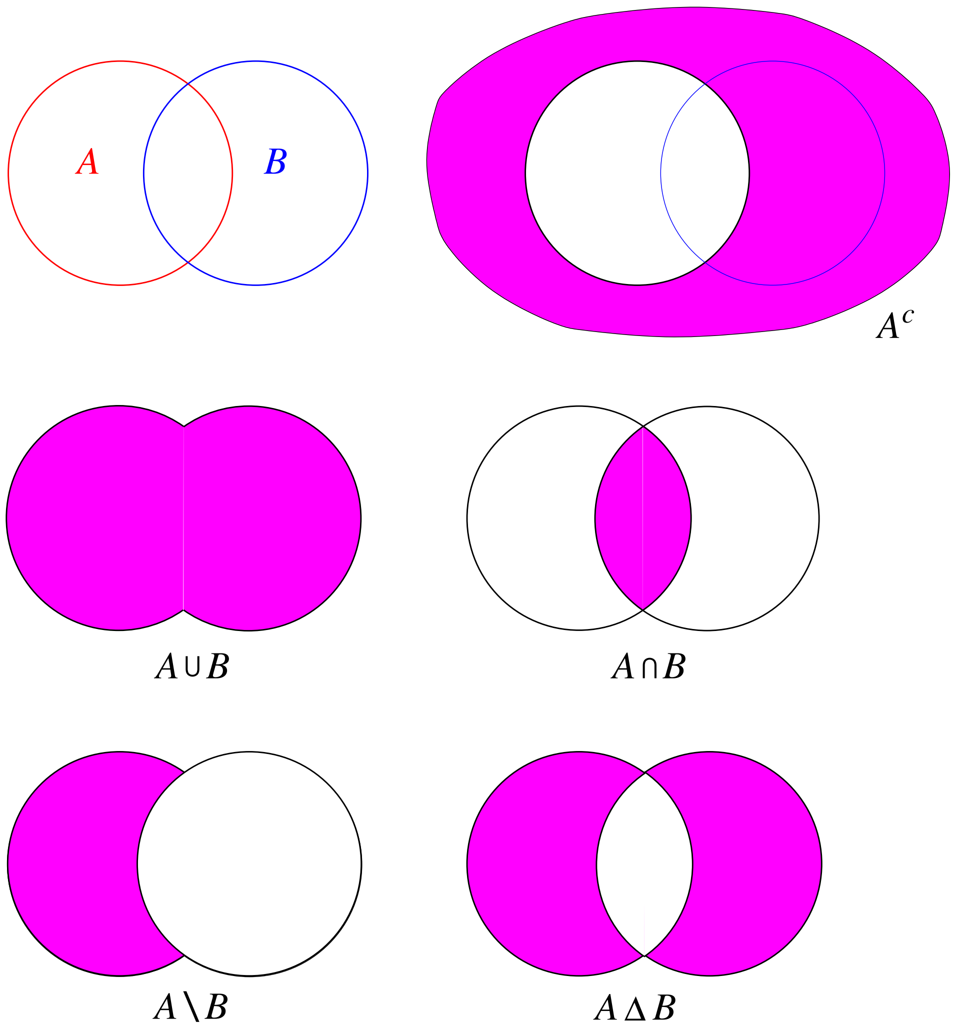

FIGURE 2.1 – Opérations élémentaires sur 2 sous-ensembles $A, B \subset X$

Si les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tous $i \neq j$), alors ils forment une union disjointe, qu'on note $\bigsqcup_{i\in I} A_i$.

2. Intersection : $A \cup B := \{x \in X\,;\, x \in A \,\text{ou}\, x \in B\}$. Plus généralement, pour $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X,
$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \in X\,;\, x \in A_i \,\text{pour tous les indices}\, i \in I\}\,.$$
3. Différence : $A \setminus B := \{x \in X\,;\, x \in A \,\text{et}\, x \notin B\}$.
4. Différence symétrique :
$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x \in X\,;\, [x \in A \,\text{et}\, x \notin B] \text{ ou } [x \in B \,\text{et}\, x \notin A]\}\,.$$
5. Complémentaire : $A^c := X \setminus A = \{x \in X\,;\, x \notin A\}$. Le complémentaire est aussi noté $\complement A$. Remarquons que la notation A^c suppose que l'ensemble global de référence X est connu (il est sous-entendu dans la notation).
6. Produit cartésien. Si X, Y sont deux ensembles, alors $X \times Y := \{(x, y)\,;\, x \in X \text{ et } y \in Y\}$. C'est l'ensemble de toutes les paires contenant un élément de X et un élément de Y. Plus généralement, pour $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ une famille d'ensembles, le produit cartésien
$$X_1 \times \cdots \times X_n := \{(x_1, x_2, \cdots x_n)\,;\, x_j \in X_j,\, \forall j \in [\![1, n]\!]\}$$
est l'ensemble de *tous* les n-uplets dont le 1er élément est dans X_1, le second élément est dans X_2, etc.
7. Distributivité des opérations d'union et d'intersection :
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)\,.$$
8. Opérations sur le complémentaire :
$(A^c)^c = A$. Si $A \subset B$, alors $A^c \supset B^c$.
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, et par conséquent $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
$A \setminus B = A \cap B^c$. $A \triangle B = A^c \triangle B^c$.

3 Image (réciproque) par une application

Soit $f : X \to Y$ une application.

1. Image (directe). Pour $A \subset X$, $f(A) := \{f(x)\,;\, x \in A\}$. L'image directe du singleton $\{x\}$ est égale au singleton $\{y\}$, avec $y = f(x)$.
2. Image réciproque : pour toute partie $B \subset Y$, l'image réciproque $f^{-1}(B) := \{x \in X\,;\, f(x) \in B\}$. Notons que si on considère un singleton $B = \{y\}$, son image réciproque $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas forcément réduite à un seul élément de X : cette image réciproque peut être vide, ou contenir plusieurs éléments.
3. Relations avec les opérations :
$f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$. $f\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$.
$f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i)$. $f^{-1}\left(\bigcap_i B_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(B_i)$.
$f^{-1}\left(B^c\right) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$.