Il y a de bonnes idées, mais d'autres choses à revoir

Jacques 李嘉琳辰 PB22000102. TD9

1.(a) Par le définition de λ et λ^* dans $\mathbb{R}^d$. E est mesurable $\Rightarrow \lambda(E) = \lambda^*(E)$

On va utiliser $\lambda(E) = \lambda^*(E) = \inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} vol(P_i),\ E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i\}$ vrai si \lambda(E) fini

Par de déf de inf. $\forall \varepsilon > 0.\ \exists P_i^\varepsilon$ t.q $\boxed{\lambda^*(E) > \sum_{i\in\mathbb{N}} vol(P_i^\varepsilon) - \varepsilon}$

~~On choisit~~ $G_\varepsilon := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^\varepsilon$. Donc $\lambda(G_\varepsilon \setminus E)$ et $E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^\varepsilon$ (*)

$= \lambda(G_\varepsilon \cap E^c) \overset{\text{mésurable}}{=} \lambda^*(G_\varepsilon \cap E^c) = \sum_{i\in\mathbb{N}} vol(P_i^\varepsilon) - \lambda^*(E) < \varepsilon$ par (*)

G_ε ouvert évident.

De plus. On définit $\varepsilon = 1/n$. et $E \subset H := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_{1/n}$. est G_δ. OK

et $Z_1 = H \setminus E$. Donc $E = H \setminus Z_1$. et $\forall n \in \mathbb{N}$. $\lambda(Z_1) = \lambda(H\setminus E) < 1/n$

$\lambda(Z_1) = 0$ lorsque $n \to +\infty$ OK Il faudrait aussi traiter le cas \lambda(E)=\infty

(b). Comme E mesurable. $E^c \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable aussi.

Par (a). Il existe G_ε s.t $\lambda(G_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$ et $E^c \subset G_\varepsilon$.

G_ε ouvert. ça induit $G_\varepsilon^c \subset E$. et G_ε^c fermé

On a $\varepsilon > \lambda(G_\varepsilon \setminus E^c) = \lambda(G_\varepsilon \cap E) = \lambda(E \cap G_\varepsilon) = \lambda(E \setminus G_\varepsilon^c)$

De plus. $E^c = \tilde{H} \setminus \tilde{Z_1} \Rightarrow E = \tilde{H}^c \cup \tilde{Z_1}$ On définit $K = \tilde{H}^c$ et

$Z_2 = \tilde{Z_1}$. et donc K est F_σ OK $\lambda(Z_2) = \lambda(\tilde{Z_1}) = 0$ par (a) OK

#

2. (a). Dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. On a K compact $\Leftrightarrow$ K bornée et fermée.

On va montrer que $f(K)$ est borné et fermé

f est continue. $\Rightarrow$ f est continue uniformément dans K.

c-a-d $\forall \varepsilon > 0.\ \exists \delta > 0.\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. (*)

K compact et $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x.\delta) \Rightarrow \exists N$. s.t $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i.\delta)$

et donc $|f(x) - \max_{1\le i\le N}\{f(x_i)\}| \le \varepsilon$ par (*) $\Rightarrow$ f borné OK

K fermé $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. une suite convergente de K.

$\lim_{n\to+\infty} x_n =: x \in K$. On va montrer $(f(x_n))_{n\ge N}$ converge.

ε, δ comme avant.

~~$\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ s.t $\forall m.n > N$. $|x_m - x_n|$~~

Par Cauchy $\exists N$ s.t $\forall m.n > N$. $|x_m - x_n| < \delta$. $\Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$.

Par Cauchy encore $\Rightarrow (f(x_n))_{n\ge N}$ converge. et $f(K)$ fermé. donc

il faut dire que f(x_n) converge vers f(x) !

Si $K = \bigcup^n F_n$ un F_σ. ~~On va montrer~~ Donc comme

On a $f(\bigcup_n F_n) = \bigcup_n f(F_n)$ où $f(F_n)$ fermé ~~par~~ l'avant.

Non, on n'a pas montré que l'image d'un fermé est fermée !

b) On note $Q = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, Donc $\mathrm{vol}(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ (Supposons $\mathrm{vol}(Q)$ fini ;

On considère $f(Q)$. $\mathrm{vol}(Q)$ est fini $\Rightarrow Q$ compact

(Si Q n'est pas fermé, on a $\lambda^*(f(Q)) \le \lambda^*(f(\bar{Q}))$
On peut seulement considérer et $\mathrm{vol}(Q) = \mathrm{vol}(\bar{Q})$
la condition plus forte.)

Donc par a). et f Lip $\Rightarrow f$ continue, $f(Q)$ compact. OK

$\Rightarrow f(Q)$ bornée. donc $\pi_i \circ f$ bornée où π_i est la projection de la i-ème espace. On ~~la note~~ $\pi_i \circ f(Q)$ note $[f(t_i), f(s_i)]$

je ne comprends pas ce que représente cet intervalle

~~C'est à dire~~ Donc on a $|f(0,0,\dots,t_i,0,\dots,0) - f(0,0,\dots,s_i,0,\dots,0)|$

$\le M|t_i - s_i| \le M|a_i - b_i|$ pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$

cette inégalité ne suffit pas !

Donc.

$\lambda^*(f(Q)) \le \prod_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \le M^n \prod_{i=1}^n |a_i - b_i| = M^n \mathrm{vol}(Q)$

f(Q) est-il dans le pavé \prod_i [f(t_i), f(s_i)] ? Ce n'est pas clair

cette constante M^n n'est pas claire

(c) Si On a $\lambda(E) = 0 \Rightarrow \lambda^*(E) = 0 \Rightarrow \inf\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(P_i),\ E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i\} = 0$

f Lip. $\exists M > 0$ t-q $|f(x) - f(y)| \le M|x-y|$, $\forall \varepsilon > 0$ fixe.

~~Par (b),~~ ~~$\lambda^*(f(E)) = \inf$~~ $\exists P_i^\varepsilon$ s.t $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(P_i) < \varepsilon$.

c-a-d $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(P_i) < \varepsilon$.

On a $\lambda^*(f(P_i)) = \lambda(f(P_i)) \le M^n \lambda(P_i)$

Donc $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^*(f(P_i)) = \lambda^*(f(\bigcup P_i)) \le M^n \lambda(\bigcup P_i)$

$= M^n \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(P_i) < \varepsilon \cdot M^n$.

M. n fixe. $\varepsilon \to 0$ et $\lambda^*(f(E)) \le \lambda^*(\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(P_i)) \Rightarrow \lambda^*(f(E)) = 0$ OK

Si E mesurable. Par 1.(b). $E = K \cup Z_r$ où K F_σ et $\lambda(Z_r) = 0$

$f(E) = f(K) \cup f(Z_r)$ ~~et $\lambda(f(E)) =$~~ ~~Par (a) et $\lambda^*(f(E))$~~

~~$= \lambda^*(f(K)) + \lambda^*(f(Z_r)) = \lambda^*(f(K))$ par l'avant.~~

~~Donc~~ On a $f(K)$ mesurable et $\lambda(f(Z_r)) = 0$ comme l'avant donc mesurable

car un F_\sigma

$\Rightarrow f(E)$ mesurable. #

Jacques 李翱唐. PB22001107 TD9

3. (a) $\lambda(E) = \inf \{\sum_{n\in\mathbb{N}} vol(P_i),\ E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_i\}$ par definition

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$. il existe une ~~existe~~ suite de $(P_n)_{n\geq N}$ t-q

$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(P_n) \leq (1+\varepsilon)\lambda(E)$

S'il existe \alpha dans]0,1[tel que..

Par l'absurde. Si $\forall n\in\mathbb{N}$. On a $\alpha\lambda(P_n) \geq \lambda(E\cap P_n)$

$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(P_n) \geq 1/\alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(E\cap P_n)$

$\geq \frac{1}{\alpha} \lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E\cap P_n)$

$= 1/\alpha\ \lambda(E)$

c'est-a-dire $(1+\varepsilon)\lambda(E) \geq 1/\alpha\ \lambda(E)$

On peut choisir ε s.t $1+\varepsilon < 1/\alpha$. pour $\alpha \in]0.1[$. Contradiction!

OK

(b) On va choisir le $\alpha \in]0.1[$ après.

Par (a). On a un rectangle $P \subset \mathbb{R}^d$ centre a.

et $P = \prod_{i=1}^{d} [a_i. b_i]$. $a_i < b_i$ et $\delta = \min_{i\in[[1.d]]}(b_i - a_i)$

On va démontrer que $Q = B(0, \delta/2)$ est contenu dans $E-E$.

C'est-à-dire $\forall x \in Q$. $\exists y, z \in E$ s.t $y - z = x$

~~On~~ Comme a est le centre de P. $a \in P + x$

Donc $\lambda(P\cap(P+x)) > 2^{-d}\lambda(P)$, $\lambda(P\cup(P+x)) = \lambda(P) + \lambda(P+x) - \lambda(P\cap(P+x))$

$= 2\lambda(P) - \lambda(P\cap(P+x)) < 2\lambda(P) - 2^{-d}\lambda(P) \xleftarrow{\text{choix de } \alpha} 2\lambda(P\cap E)$

$= \lambda(P\cap E) + \lambda(P\cap E + x)$ et $P\cap E$, $P\cap E^{+x} \subseteq P\cup(P+x)$

Donc $(P\cap E)\cap(P\cap E + x) \neq \emptyset$. $\exists y, z \in P\cap E$. $y = z + x$

il faut terminer l'argument !

$\varphi \Rightarrow B(0, \delta/2) \subseteq Q \subseteq E-E$. #

4. ~~On va montrer~~ J'ai connu une conclusion mais ~~j'ai~~ je n'ai pas un démo "bien".

Chaque fonction mesurable peut s'écrire comme une limite simple d'une suite de fonctions étagées μ-p.p.

C'est-à-dire il existe une suite de fonctions étagée $\{f_n\}_{n\geq 1}$. On a $\forall x$. $f_n(x) \to f(x)$ λ.p.p

Maintenant. On fixe $\delta > 0$. $\{f_n\}_{n\geq 1}$ une suite comme l'avant,

$f_n \to f$ λ.p.p. Car f_n est fonction étagé. Par le définition de "étagé". Il existe E_n. t-q $\lambda(E_n) < 1/2^n$ et f_n est continue dans $E \setminus E_n$.

cela ne vient pas de la définition de "étagé".

Par thm de Egorov. Il existe ~~une~~ un ensemble $A_{\delta/3}$ t-q $m(E \setminus A_{\delta/3}) < \delta/3$ et $f_n \to f$ uniformément dans $A_{\delta/3}$

Alors on choisit N s.t $\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \delta/3$

$$F' := A_{\delta/3} \setminus \bigcup_{n=N}^{+\infty} E_n$$

dans F' on a facilement que F' est mesurable. et pour chaque $n \geq N$. f_n est continue, f_n converge uniformément vers $f \Rightarrow f$ est continue dans F'. On ~~alors~~ puis choisit $F \subseteq F'$ fermé et

$m(F' \setminus F) \leq \delta/3$ ~~par~~ car F' est mesurable. par 1. (b)

$f|_F$ continue et $m(E \setminus F) = m(E \setminus A_{\delta/3}) + m(\bigcup_{n=N}^{+\infty} E_n) + m(F' \setminus F) < \delta$.

l'idée est OK.

non, rien n'est évident. Il faut expliquer

5. C'est évident que f est linéaire dans $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Par le thm de Lusin. il existe un ensemble fermé $F \subset F$

$\lambda(E \setminus F) < \delta$. pour tout $\delta > 0$. $f|_F$ est continue.

F est plus grande que. $\mathbb{Q}$ $F \supsetneq \mathbb{Q}$ car $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

non, c'est la restriction à F qui est continue en r.

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. f est continue dans r. $\boxed{\text{dans } \mathbb{R}}$ (arbitraire de $\delta > 0$)

par linéairité et continuité, et densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

f est continue dans une voisinage de r puis dans $\mathbb{R}$

argument incomplet