Intégration et probabilités, USTC - 2024

Il y a un certain nombre de choses à revoir. Essaye de corriger les exercices avec des problèmes

TD6 : Intégration

Thursday - Mar 14, 2024

1. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\int_E |f| d\mu < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu\left(2^n \leq |f| < 2^{n+1}\right) < \infty.$$

Montrer que si $\mu(E) < \infty$, on a aussi

$$\int_E |f| d\mu < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 1} \mu\left(|f| \geq n\right) < \infty.$$

Que se passe-t-il si la masse totale est infinie ?

problème dans la définition de f_n. Ne pas utiliser n pour l'indice de sommation

1 D'un part, $f_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{n} \mathbb{1}_{|f|^{-1}([2^n, 2^{n+1}))}$ est un suite croissante de fonctions étagées, $f_n \leq |f|$, et $\lim\uparrow \int f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(2^n \leq |f| < 2^{n+1})$.
On pose $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(2^n \leq |f| < 2^{n+1}) = \mathcal{F}$, donc $\int |f| d\mu \geq \mathcal{F}$ ok
D'autre part, $g_n = 2 f_n$, on a $\limsup_{n\to\infty} g_n \geq |f|$ et
$\lim\uparrow \int g_n d\mu = 2\mathcal{F} = \int \limsup_{n\to\infty} g_n d\mu$, alors $\int |f| d\mu \leq 2\mathcal{F}$. ok
alors $\int |f| d\mu < \infty \Leftrightarrow \mathcal{F} < \infty$.
De même, on pose $f_n = \sum_{k=1}^{n} k \mathbb{1}_{|f|^{-1}([k, k+1))}$, on a $\lim\uparrow \int |f_n| d\mu = \mathcal{F}$
que vaut F ici?
on a $\int |f| d\mu \geq \mathcal{F}$. dire que f_n\leq |f|
$g_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1) \mathbb{1}_{|f|^{-1}([k, k+1))}$, on a $g_n - f_n = \mathbb{1}_{|f|^{-1}([1, n+1))}$, on a
partir de k=0
$\lim\uparrow \int g_n d\mu = \mathcal{F} + \mu(\mathcal{E})$, alors $\int |f| d\mu \leq \mathcal{F} + \mu(\mathcal{E})$
attention, on n'a pas |f| \leq g_n !
Si $\mu(\mathcal{E}) = \infty$, on pose $f \equiv \frac{1}{2}$, contradiction. ok #.

2. Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable, à valeurs complexes. Montrer que si $\left|\int_E f d\mu\right| = \int_E |f| d\mu$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que $|f| = \alpha f$ μ-p.p.

2. $\left|\int_{\mathcal{E}} f d\mu\right| = \max_{|u|=1} \int \mathrm{Re}(uf) d\mu$, $\int_{\mathcal{E}} |f| d\mu = \int \max_{|u|=1} \mathrm{Re}(uf) d\mu$.

Parce que S^1 est compact, il existe α t.q. $|\int_E f d\mu| = \int \mathrm{Re}(\alpha f) d\mu$.

$\int |f| d\mu - |\int f d\mu| = \int \left(\max_{|u|=1} \mathrm{Re}(uf) - \mathrm{Re}(\alpha f)\right) d\mu = 0$

Alors $\max_{|u|=1} \mathrm{Re}(uf) = \mathrm{Re}(\alpha f)$ μ-p.p. $\Rightarrow |f| = \alpha f$ μ-p.p. ok #

3. Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que f' est mesurable pour la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.
   (b) On suppose que f' est bornée. Montrer que $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$.

3. (a). Pour tout n, $g_n(x) = n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ est mesurable. pb: sur quel intervalle est défini g_n ?

$(f')^{-1}((a,+\infty)) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} g_n^{-1}((a-\frac{1}{k},+\infty))$, alors f' est mesurable.

(b). plus simplement: f' est la limite ponctuelle des g_n, donc elle est mesurable

4. (a) Calculer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, les limites quand $n \to \infty$ des intégrales

$$I_{\alpha,n} = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} dx \quad \text{et} \quad J_{\alpha,n} = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$$

   (b) Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \int_E |f_n| d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\geq 0} \int_E f_n d\mu = \int_E \sum_{n\geq 0} f_n d\mu,$$

   puis calculer

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx.$$

4. (a). $f_n = \mathbb{1}_{[0,n]} (1-\frac{x}{n})^n x^{\alpha-1} + \mathbb{1}_{(n,+\infty)} e^{-x} x^{\alpha-1}$, on a $\lim \downarrow f_n = e^{-x} x^{\alpha-1}$

expliquer pourquoi la suite est décroissante

Parceque $\int \mathbb{1}_{(n,+\infty)} e^{-x} x^{\alpha-1} = \int_n^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \to 0$, on a

$\lim_{n\to\infty} I_{\alpha,n} = \lim_{n\to\infty} \downarrow \int f_n dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

mieux justifier la limite, en appliquant un TCD quand c'est possible (dépend de la valeur de \alpha)

De même, pour $J_{\alpha,n}$, si $\alpha \geq 1$, $J_{\alpha,n} \to \infty$

Si $\alpha < 1$, $J_{\alpha,n} \to \int_0^\infty e^{(\alpha-1)x} = \frac{1}{1-\alpha}$.

quid si \alpha>= 1 ?

justifier cette égalité

(b). $g := \sum_{n\geq 0} |f_n|$, car $\int g \, d\mu = \sum_{n\geq 0} \int |f_n| d\mu < \infty$

mal dit. Justifier

g est $\boxed{\text{bien-défini sur } \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mu) \text{ p.p}}$ et $|f_n| \leq g$.

ne suffit pas pour justifier le TCD

alors par le thm de convergence dominée,

$\sum_{k=1}^{n} \int_{\mathcal{E}} f_k \, d\mu = \int_{\mathcal{E}} \sum_{k=1}^{n} f_k \, d\mu \to \int_{\mathcal{E}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu$, $\sum_{n\geq 0} \int_{\mathcal{E}} f_n \, d\mu = \int_{\mathcal{E}} \sum_{n\geq 0} f_n \, d\mu$.

5. (*Uniforme continuité de l'intégrale*) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable.

(a) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int |f| \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu = 0$.

(b) Montrer que $\forall\, \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \epsilon$.

(c) En déduire si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue, alors la fonction $F : u \mapsto \int_0^u f(x)dx$ est uniformément continue.

décroissante

5. (a). $\int |f| \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu$ est un suite ~~croissante~~, $A_n := |f|^{-1}((n, +\infty))$.

Si $\int |f| \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu = \int_{A_n} |f| d\mu \not\to 0$,

justifier

On a $\lim \downarrow \mu(A_n) = \mu(f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R})) \neq 0$, contradiction.

(b). $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ t.q. $\int_{A_N} |f| d\mu < \varepsilon$. On pose $\delta = \mu(A_n)$ N=n?

$$\int_A |f| d\mu = \int_{A \setminus A_N} |f| d\mu + \int_{A \cap A_N} |f| d\mu$$

$$= \int_{A \setminus A_N} |f| \mathbb{1}_{|f| \leq n} d\mu + \int |f| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu$$

$$\leq n \cdot \mu(A \setminus A_N) + \int |f| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu$$

NON

$$< n \cdot \mu(A_N \setminus A) + \int |f| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu$$

A revoir

$$\leq \int |f| (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{A^c}) \mathbb{1}_{|f|>n} d\mu < \varepsilon.$$

(c), $\forall \varepsilon > 0$, On choisi δ dans (b).

que vaut la mesure \mu ici?

$\forall |x_1 - x_2| < \delta$, On a $\mu([x_2, x_1]) < \delta$, alors

$|\mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_2)| = |\int_{[x_1, x_2]} f \, d\mu| \leq \int_{[x_2, x_1]} |f| \, d\mu < \varepsilon$. #