Groupes et géométrie

Examen partiel

Exercice 1

Le but de cet exercice est de montrer que l'application exponentielle exp : $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ est surjective.

Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{d} a_x X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0} a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note :

$$\mathbb{C}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{C}[X]\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On considère aussi $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}(n,C)$.

1. Montrer que $A^{-1} \in \mathbb{C}[A]$, puis que $\mathbb{C}[A]^\times$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe.
   Indication : pour $B, C \in \mathbb{C}[A]^\times$, considérer le polynôme $Q(X) = \det(B + X(C - B)) \in \mathbb{C}[X]$, et utiliser le fait que si $F \subset \mathbb{C}$ est fini, alors $\mathbb{C} \setminus F$ est connexe.
3. Montrer que si G est un groupe de Lie abélien connexe, alors $\exp_G$ est surjective.
4. Conclure.

Exercice 2

Soit $\xi = (E,p,M)$ un fibré vectoriel de rang r, et soit ∇ une connexion sur ξ. On note ∇^{End} la connexion induite sur le fibré vectoriel $\mathrm{End}(\xi) = \xi^* \otimes \xi$ des endomorphismes de ξ. On rappelle que si $\varphi \in \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $X \in \mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$, on a :

$$\left(\nabla_X^{\mathrm{End}} \varphi\right)(\sigma) = \nabla_X \left(\varphi(\sigma)\right) - \varphi\left(\nabla_X \sigma\right)$$

1. Pour $\varphi \in \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$ et $X, Y \in \mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$, donner une expression de $\left(\nabla_X^{\mathrm{End}} \nabla_Y^{\mathrm{End}} \varphi\right)(\sigma)$ qui ne fasse pas intervenir la connexion ∇^{End}.
2. On note $F \in \Omega^2(\mathrm{End}(\xi))$ la courbure de ∇, et $F^{\mathrm{End}} \in \Omega^2(\mathrm{End}(\mathrm{End}(\xi))$ la courbure de ∇^{End}. Montrer que $F^{\mathrm{End}} = \mathrm{ad}(F)$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in M \ \forall u, v \in T_x M \ \forall \varphi \in \mathrm{End}(\xi_x) \quad F_x^{\mathrm{End}}(u,v)\varphi = [F_x(u,v), \varphi]$$

Exercice 3

Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, et $H \subset G$ un sous-groupe de Lie fermé dont on note $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie. On note $\pi_H : G \to G/H$ et $\pi_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ les projections canoniques.

1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes de Lie. On considère l'action à droite $G \times V \curvearrowleft H$ définie par $(g,v).h = (gh, \rho(h^{-1}).v)$. Montrer que le quotient $G \times V/H$ est l'espace total d'un fibré vectoriel ξ_ρ de base G/H.
2. On définit $\rho : H \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ par $\rho(h).\pi_{\mathfrak{h}}(X) = \pi_{\mathfrak{h}}(\mathrm{Ad}(h)X)$ pour tous $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}$. Montrer que l'on définit ainsi un morphisme de groupes de Lie, et que le fibré vectoriel ξ_ρ construit à la question précédente avec $V = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est isomorphe au fibré tangent $T(G/H)$.
3. Identifier l'espace tangent $T_V \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$ de l'espace homogène $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$ en $V \in \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$ avec $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}^d/V)$.

Groups and geometry

Mid-term exam

Exercise 1

The goal of this exercise is to show that the exponential map $\exp : \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ is surjective.

Let $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. For $P = \sum_{k=0}^{d} a_x X^k \in \mathbb{C}[X]$, we write $P(A) = \sum_{k=0} a_k A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Let:

$$\mathbb{C}[A] = \{P(A) \,|\, P \in \mathbb{C}[X]\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

We also consider $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}(n,C)$.

1. Prove that $A^{-1} \in \mathbb{C}[A]$, then show that $\mathbb{C}[A]^\times$ is a subgroup of $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$.
2. Prove that $\mathbb{C}[A]^\times$ is connected.
   Hint: for $B, C \in \mathbb{C}[A]^\times$, consider the polynomial $Q(X) = \det(B + X(C-B)) \in \mathbb{C}[X]$, and use the fact that $\mathbb{C} \setminus F$ is connected whenever $F \subset \mathbb{C}$ is finite.
3. Let G be a connected abelian Lie group. Prove that $\exp_G$ is surjective.
4. Conclude.

Exercise 2

Let $\xi = (E,p,M)$ be a vector bundle of rank r, and let ∇ be a connection on ξ. We consider the induced connection ∇^{End} on the endomorphism bundle $\mathrm{End}(\xi) = \xi^* \otimes \xi$. Recall that for $\varphi \in \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$ and $X \in \mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$, we get:

$$\left(\nabla_X^{\mathrm{End}}\varphi\right)(\sigma) = \nabla_X\left(\varphi(\sigma)\right) - \varphi\left(\nabla_X \sigma\right)$$

1. For $\varphi \in \Gamma(\mathrm{End}(\xi))$, $\sigma \in \Gamma(\xi)$ and $X, Y \in \mathcal{X}(M) = \Gamma(TM)$, give an expression of $\left(\nabla_X^{\mathrm{End}}\nabla_Y^{\mathrm{End}}\varphi\right)(\sigma)$ that does not involve the connection ∇^{End}.
2. Let $F \in \Omega^2(\mathrm{End}(\xi))$ be the curvature of ∇, and $F^{\mathrm{End}} \in \Omega^2(\mathrm{End}(\mathrm{End}(\xi))$ the curvature of ∇^{End}. Prove that $F^{\mathrm{End}} = \mathrm{ad}(F)$, i.e.

$$\forall x \in M \ \forall u, v \in T_x M \ \forall \varphi \in \mathrm{End}(\xi_x) \quad F_x^{\mathrm{End}}(u,v)\varphi = [F_x(u,v), \varphi]$$

Exercise 3

Let G be a Lie group, $\mathfrak{g}$ its Lie algebra, and $H \subset G$ a closed Lie subgroup whose Lie algebra is denoted by $\mathfrak{h}$. Consider $\pi_H : G \to G/H$ and $\pi_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ the canonical projections.

1. Let V be a finite dimensional real vector space, and $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ a Lie group morphism. Consider the right action $G \times V \curvearrowleft H$ defined by $(g,v).h = (gh, \rho(h^{-1}).v)$. Prove that the quotient $G \times V/H$ is the total space of a vector bundle ξ_ρ over G/H.
2. Let $\rho : H \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ be defined by $\rho(h).\pi_{\mathfrak{h}}(X) = \pi_{\mathfrak{h}}(\mathrm{Ad}(h)X)$ for all $h \in H$ and $X \in \mathfrak{g}$. Prove that this defines a Lie group morphism, and that the vector bundle ξ_ρ constructed in the previous question with $V = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ is isomorphic to the tangent bundle $T(G/H)$.
3. Identify the tangent space $T_V\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$ of the homogeneous space $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$ at $V \in \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^d)$ with $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}^d/V)$.