Cours de M2
« Surfaces de Riemann »
Université Paris-Sud Orsay, 2012–2013

JOËL MERKER

Devoir n° 1 à rendre le 22 octobre 2012 (Assimilation du cours polycopié)

Exercice 1. Soient $\Gamma, \Gamma' \subset \mathbb{C}$ deux réseaux. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ satisfaisant $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$. Montrer que l'application $z \mapsto \alpha z$ de $\mathbb{C}$ dans lui-même induit une application holomorphe :

$$\mathbb{C}/\Gamma \to \mathbb{C}/\Gamma'$$

et que cette application est biholomorphe si et seulement si $\alpha\Gamma = \Gamma'$.

(b) Montrer que tout tore complexe $X = \mathbb{C}/\Gamma$ est isomorphe à un tore de la forme :

$$X(\tau) := \mathbb{C}\big/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau),$$

où $\tau \in \mathbb{C}$ satisfait $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.

(b) On suppose que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et que $\mathrm{Im}(\tau) > 0$. Soit l'application associée :

$$\tau' := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Montrer que les deux tores complexes $X(\tau)$ et $X(\tau')$ sont isomorphes.

Exercice 2. Soit X un espace topologique et soient trois points quelconques $a, b, c \in X$. Établir en détail que si $u_1, u_2 \colon [0,1] \to X$ sont deux courbes continues de a vers b qui sont homotopes et si $v_1, v_2 \colon [0,1] \to X$ sont deux autres courbes continues homotopes de b vers c, alors la relation '$\sim$' d'homotopie est conservée par concaténation '$\cdot$' et par parcours en sens inverse '$(\cdot)^-$' :

$$u_1 \cdot v_1 \sim u_2 \cdot v_2 \quad \text{et} \quad u_1^- \sim u_2^-.$$

Exercice 3. Montrer en détail qu'un espace topologique connexe par arcs X est simplement connexe *si et seulement si* deux courbes continues fermées quelconques dans X — pas forcément raccordées en un même point — sont librement homotopiques dans X.

Exercice 4. Pourquoi les solutions dans $\mathbb{C}^2$ de toute équation homogène d'un certain degré k quelconque :

$$a_0x^k + a_1x^{k-1}y + \cdots + a_{k-1}xy^{k-1} + a_ky^k = 0$$

sont-elles k droites complexes (comptées avec multiplicité) passant par l'origine ? Discuter la géométrie. Que dire en dimension supérieure ?

Exercice 5. Étudier la courbe complexe plane d'équation affine :

$$x^3 - x^2 + y^2 = 0,$$

et dessiner son intersection avec $\mathbb{R}^2$, *i.e.* en supposant x et y réels.

Exercice 6. Dessiner sur $\mathbb{R}^2$ la courbe algébrique plane d'équation :

$$x^3 + x^2 + y^2 = 0,$$

et comparer la géométrie sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{C}^2$.

Exercice 7. Montrer que l'origine $(0,0)$ est un point triple ordinaire de la courbe d'équation :

$$\big(x^2+y^2\big)^2+3\,x^2y-y^3=0.$$

Dessiner cette courbe dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Soit un polynôme de degré n sous forme weierstrassienne :

$$f(x,y)=y^n+a_1(x)\,y^{n-1}+\cdots+a_n(x).$$

Établir que :

$$\text{Discriminant}_y(f):=\text{Résultant}\big(f,f_y\big)\not\equiv 0$$

est non identiquement nul si et seulement si f ne possède pas de facteur multiple dans $\mathbb{C}[x,y]$.

Montrer ensuite que la courbe projective associée à f n'intersecte la droite à l'infini L_∞ dans $\mathbb{P}^2$ qu'en un nombre fini de points. Quand ces points sont-ils de multiplicité 1 ?

Exercice 9. Trouver plusieurs exemples de courbes algébriques réelles planes dont la partie régulière n'est pas connexe.

Exercice 10. Soit $h\in\mathscr{O}(\mathbb{C})$ une fonction holomorphe entière, c'est-à-dire définie sur $\mathbb{C}$ tout entier. Montrer que h est polynomiale si et seulement si le point à l'infini $\{\infty\}$ est un pôle de h.

Exercice 11. Soit le polynôme $x^3-x^2+y^2$.

(a) Montrer qu'il est irréductible dans $\mathbb{C}[x,y]$.

(b) Montrer qu'il n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}\{x\}[y]$.

Exercice 12. Montrer que x^3-y^2 est irréductible dans $\mathbb{C}\{x\}[y]$. *Indication* : Utiliser le fait suivant, à établir rigoureusement : afin que :

$$f(x,y)=u(x,y)\prod_{j=1}^{d}\big(y-y^j(x)\big)$$

soit irréductible dans $\mathbb{C}\{x\}[y]$, où $u(0,0)\neq 0$, il faut et il suffit que chaque $y^{j_1}(x)$ se transforme en chaque autre $y^{j_2}(x)$ par prolongement analytique le long d'une certain courbe continue appropriée fermée autour de l'origine.

Exercice 13. Soit X une variété et soient $\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2\subset X$ deux sous-ensembles ouverts connexes et simplement connexes tels que $\mathrm{U}_1\cap\mathrm{U}_2$ est connexe. Montrer que la réunion $\mathrm{U}_1\cup\mathrm{U}_2$ est elle aussi simplement connexe.

Exercice 14. Soit $X:=\mathbb{C}\backslash\{\pm1\}$ et soit $Y:=\mathbb{C}\backslash\big\{\frac{\pi}{2}+k\pi\colon\ k\in\mathbb{Z}\big\}$. Montrer que l'application :

$$\sin\colon\ Y\to X$$

est un revêtement topologique.

On considère maintenant les courbes suivantes dans X :

$$u\colon\ [0,1]\to X,\qquad u(t):=1-e^{2i\pi t},$$
$$v\colon\ [0,1]\to X,\qquad v(t):=-1+e^{2i\pi t}.$$

Soit $w_1\colon[0,1]\to Y$ le relèvement de la concaténation $u\cdot v$ qui satisfait $w_1(0)=0$ et soit $w_2\colon[0,1]\to Y$ le relèvement de $v\cdot u$ qui satisfait $w_2(0)=0$. Montrer que l'on a :

$$w_1(1)=2\pi\qquad\text{et}\qquad w_2(1)=-2\pi.$$

En conclure que $\pi_1(X)$ n'est pas commutatif.

Exercice 15. Soient X et Y des espaces topologiques séparés et soit $p\colon Y\to X$ un revêtement. Soit Z un espace topologique connexe par arcs et localement connexe par arcs et soit $f\colon Z\to X$

une application continue. Soit $c \in Z$, soit $a := f(c)$ et soit $b \in Y$ tel que $p(b) = a$. Montrer qu'il existe un relèvement $f\colon Z \to Y$ de f avec $f(c) = b$ si et seulement si :

$$f_*\big(\pi_1(Z, c)\big) \subset p_*\big(\pi_1(Y, b)\big).$$

Cours de M2
« Surfaces de Riemann »
Université Paris-Sud Orsay, 2012–2013

JOËL MERKER

Devoir n° 2 à rendre le lundi 12 novembre 2012
(Exercices d'assimilation du cours polycopié)

Exercice 1. Soit $p = (0,0)$ un point de multiplicité $k \geqslant 1$ d'une courbe algébrique complexe affine :

$$V = \big\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \colon\ f(x,y) = 0\big\},$$

qui est aussi un point de multiplicité m d'une autre courbe algébrique :

$$W = \big\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \colon\ h(x,y) = 0\big\},$$

c'est-à-dire que l'on a :

$$f = f_k(x,y) + f_{k+1}(x,y) + \cdots \qquad (f_k(x,y) \not\equiv 0),$$
$$h = h_m(x,y) + h_{m+1}(x,y) + \cdots \qquad (f_k(x,y) \not\equiv 0),$$

avec les $f_j \in \mathbb{C}[x,y]$ homogènes de degré j et les $h_k \in \mathbb{C}[x,y]$ homogènes de degré k. Montrer que l'on a la minoration suivante de leur nombre d'intersection local :

$$\big(V \cdot W\big)_p \geqslant k\,m.$$

Exercice 2. Calculer $\big(V \cdot W\big)_{(0,0)}$ pour les courbes :

$$V = \big\{y - \lambda\, x\big\} \qquad \text{et} \qquad W = \big\{y^2 - x^3 = 0\big\},$$

et discuter le résultat en fonction des valeurs de λ.

Exercice 3. Montrer que toutes les formes différentielles méromorphes sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ont un coefficient qui est une fraction rationnelle dans une carte affine $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Exercice 4. Montrer que les formes différentielles méromorphes sur un tore complexe $\mathbb{C}\big/\big(\mathbb{Z}\,\omega_1 + \mathbb{Z}\,\omega_2\big)$ proviennent de formes différentielles méromorphes sur $\mathbb{C}$ doublement périodiques par rapport au réseau concerné.

Exercice 5. Montrer que toute forme différentielle holomorphe ω sur la sphère de Riemann est nécessairement identiquement nulle. *Indication :* On pourra considérer $f(p) := \int_{p_0}^{p} \omega$.

Exercice 6. Soit un polynôme cubique :

$$x^3 + px + q,$$

à coefficients complexes dont les racines sont simples. Montrer que la projectivisée dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de la courbe complexe d'équation affine :

$$y^2 = x^3 + px + q$$

est géométriquement lisse. Quels sont ses points à l'infini ? Élaborer des figures et des visions intuitives. Quelle est la disposition de la droite à l'infini par rapport à cette cubique ?

Exercice 7. Montrer qu'en tout point d'une conique (degré $d = 2$) irréductible (non décomposable en réunion de deux droites) $C \subset \mathbb{P}^2$, la droite tangente a un ordre de contact exactement égal à 2 avec C.

Exercice 8. Montrer qu'un point géométriquement lisse $[X_0 \colon Y_0 \colon Z_0] \in C$ d'une courbe algébrique complexe projective plane :

$$C = \big\{F(X \colon Y \colon Z) = 0\big\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

est un point d'inflexion si et seulement si :

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial X} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial X} & \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial Y} & \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \end{pmatrix} (X_0 \colon Y_0 \colon Z_0).$$

Exercice 9. Étant donné quatre trois points $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ en position générale, *i.e.* tels que trois points parmi eux ne sont jamais situés sur une droite projective, montrer qu'il existe un unique automorphisme linéaire :

$$T \colon \quad \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

qui envoie ces points sur les quatre points :

$$A_1 = [1 \colon 0 \colon 0], \qquad A_2 = [0 \colon 1 \colon 0], \qquad A_3 = [0 \colon 0 \colon 1], \qquad A_4 = [1 \colon 1 \colon 1],$$

respectivement, *i.e.* satisfaisant $T(P_i) = A_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 10. Soit $S^1 \subset \mathbb{C}$ le cercle unité, soit $\mathscr{C}_{S^1}$ le faisceau des fonctions continues sur S^1 et soit $\mathscr{Z}_{S^1}$ le faisceau des fonctions localement constantes sur S^1 à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que le préfaisceau quotient $\mathscr{C}_{S^1} \big/ \mathscr{Z}_{S^1}$ ne satisfait pas à l'axiome de recollement requis pour les faisceaux.

Exercice 11. Soit X une surface de Riemann. Pour $\mathsf{U} \subset X$ ouvert, soit :

$$\mathscr{F}(\mathsf{U}) := \mathscr{O}_X^*(\mathsf{U}) \big/ \exp\big(\mathscr{O}_X(\mathsf{U})\big).$$

Montrer que $\mathscr{F}$, muni des applications usuelles de restriction, est un préfaisceau qui ne satisfait pas l'axiome d'unicité **(iii)**.

Exercice 12. Soit $\mathscr{F}$ un préfaisceau arbitraire sur un espace topologique quelconque X. Montrer que le faisceau $\Gamma\big(\mathsf{Germes}\,(\mathscr{F})\big)$ associé à $\mathscr{F}$ qui est constitué des sections continues de $\mathsf{Germes}(\mathscr{F}) = \coprod_{x \in X} \mathscr{F}_x$ au-dessus d'ouverts $\mathsf{U} \subset X$ et qui vient accompagné d'un morphisme de préfaisceaux naturel :

$$\gamma \colon \mathscr{F} \longrightarrow \Gamma\big(\mathsf{Germes}\,(\mathscr{F})\big)$$

est caractérisé par la propriété universelle suivante. Pour tout morphisme de préfaisceaux sur X :

$$\varphi \colon \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$$

dont l'espace image $\mathscr{G}$ est un *vrai* faisceau, il existe un unique morphisme de faisceaux (en pointillés) qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathscr{G} \\ \Gamma\big(\mathsf{Germes}\,(\mathscr{F})\big) \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd} .$$

Exercice 13. Soit X une surface de Riemann et soit un point $a \in X$. On suppose qu'un germe donné de fonction holomorphe $f_a \in \mathscr{O}_{X,a}$ admet un prolongement analytique le long de toute courbe continue dans X qui part de a. Si (Y, p, g, b) est le prolongement analytique maximal de f_a, montrer que $p \colon Y \to X$ est un revêtement non ramifié.

Exercice 14. Soient $p_1, \ldots, p_n$ des points de $\mathbb{C}$ distincts deux à deux et soit :

$$X := \mathbb{C} \big\backslash \{p_1, \ldots, p_n\}.$$

Montrer que :

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Indication : construire un recouvrement $\mathfrak{U} = (\mathsf{U}_i)_{i=1,2}$ de X par deux ouverts U_1 et U_2 connexes et simplement connexes dont l'intersection $\mathsf{U}_1 \cap \mathsf{U}_2$ possède $n+1$ composantes connexes.

Cours de M2
« Surfaces de Riemann »
Université Paris-Sud Orsay, 2012–2013

JOËL MERKER

Devoir n° 3 à rendre le lundi 17 décembre 2012

Exercice 1. Soit D un diviseur sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1$. Vérifier que :
(a) $\dim H^0\big(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_D\big) = \max\big(0,\ 1 + \deg D\big)$;
(b) $\dim H^1\big(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_D\big) = \max\big(0,\ -1 - \deg D\big)$.

Exercice 2. Sur $\mathbb{P}^1$, étant donné un diviseur $D \geqslant 0$ effectif :

$$D = n_1\, p_1 + \cdots + n_k\, p_k \qquad\qquad (n_i \geqslant 1),$$

établir le théorème de Riemann-Roch en considérant des fractions rationnelles.

Exercice 3. Soit S une surface de Riemann compacte de genre g et soit un diviseur $D \in \mathrm{Div}(S)$ de degré :

$$d = \deg D \geqslant 2g + 1.$$

(a) Vérifier que $\ell(D) = d - g + 1$.
(b) Soit $\big\{f_0, f_1, \ldots, f_{d-g}\big\}$ une base de $\mathscr{L}(D)$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad S &\longrightarrow \mathbb{P}^{d-g} \\ p &\longmapsto \big[f_0(p) \colon \cdots \colon f_{d-g}(p)\big] \end{aligned}$$

est bien définie, est injective et est immersive.

Exercice 4. Sur une surface de Riemann compacte, établir l'existence de formes différentielles élémentaires de troisième espèce (exactement deux pôles distincts d'ordre 1) en appliquant le théorème de Riemann-Roch.

Exercice 5. Sur une surface de Riemann compacte S de genre $g \geqslant 1$ munie d'une base canonique (symplectique) :

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_g, \gamma_{g+1}, \ldots, \gamma_{2g}$$

de son premier groupe d'homologie $H_1(S, \mathbb{Z})$, si on spécifie les deux blocs de taille $g \times g$ de la matrice des périodes $\Pi_{g\times 2g} = \big(Y_{g\times g}\ Z_{g\times g}\big)$ associée à une base $\big\{\omega_1, \ldots, \omega_g\big\}$ de $\Omega(S)$, vérifier que Y et Z sont inversibles.

Exercice 6 (assimilation synthétique du cours). Résumer en 15 à 30 lignes élégantes les idées de la démonstration de la démonstration de la deuxième proposition principale : *Sur une surface de Riemann compacte, si un diviseur non nul $D \in \mathrm{Div}^0(S)$ appartient au noyau de l'application d'Abel-Jacobi :*

$$\mathsf{A_J}(D) = 0,$$

alors il existe une fonction méromorphe $f \in \mathscr{M}^*(S)$ qui le représente : $\mathrm{div}(f) = D$.

Exercice 7. En s'inspirant du cas (détaillé dans le cours) où ω et φ sont des 1-formes holomorphes, établir la formule page 22 du chapitre sur le théorème d'Abel :

$$\int_{\partial\Omega} v\, \varphi' = \sum_{\beta=1}^{g} \big(\pi_\beta(\omega)\, \pi_{g+\beta}(\varphi') - \pi_{g+\beta}(\omega)\, \pi_\beta(\varphi')\big).$$

Exercice 8. Montrer en détail le lemme de la page 5 du polycopié « Théorème d'inversion de Jacobi » (distribué lundi 3 décembre 2012), et illustrer la (légère) différence entre le cas $n = 1$ et les cas $n \geqslant 2$ par un exemple.

Exercice 9. Montrer en détail que le d-ème ($d \geqslant 1$) produit symétrique $S^{(d)}$ d'une surface de Riemann compacte S est toujours une variété complexe de dimension d (réfléchir d'abord sur le cas $d = 2$; polycopié distribué le lundi 3 décembre 2012).

Exercice 10. Sur un tore $S := \mathbb{C}/\Lambda$ où $\Lambda = \mathbb{Z}\,\omega_1 + \mathbb{Z}\,\omega_2$ avec $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, donner une démonstration directe du théorème de Riemann-Roch dans le cas d'un diviseur $D \geqslant 0$ *effectif* (plus facile que le cas général) :

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i\, p_i \qquad\qquad (n_i \geqslant 1).$$

On pourra choisir des images inverses $z_i \in \mathbb{C}$ des p_i à travers la projection $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}/\Lambda$, et utiliser les fonctions :

$$f_{ij}(z) := \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\,\frac{d^j \wp(z - z_i)}{dz^j} \qquad\qquad (i = 1 \cdots k\,;\ j = 1 \cdots n_i - 2),$$

$$g_i(z) := \big(z_i - z_{i+1}\big)\left[\frac{1}{(z - z_i)(z - z_{i+1})} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{(z - z_i - \omega)(z - z_{i+1} - \omega)} - \frac{1}{\omega^2}\right]$$

$$(i = 1 \cdots k - 1).$$

Exercice 11 (assimilation synthétique du cours). Résumer en 15 à 30 lignes intelligentes les grandes étapes de la démonstration du théorème d'inversion de Jacobi (utiliser le polycopié distribué le lundi 3 décembre 2012).

Exercice 12 (révision). Si $f\colon X \longrightarrow Y$ est une application holomorphe entre surfaces de Riemann compactes, démontrer *en détail* que la restriction :

$$X \big\backslash f^{-1}\big(f\big(\mathrm{Crit}(f)\big)\big) \longrightarrow Y \big\backslash f\big(\mathrm{Crit}(f)\big)$$

est un revêtement.

Exercice 13 (culture). Qu'est-ce que le Théorème de Sard ? Trouver dans la littérature des énoncés divers de ce théorème (dans des bons livres, pas sur internet !).

Exercice 14 (culture). Qu'est-ce que le Théorème de l'application propre de Remmert ?

Cours de M2 « Surfaces de Riemann »
Université Paris-Sud Orsay, 2012–2013

JOËL MERKER

Devoir n° 4 à rendre le lundi 7 janvier 2013

Exercice 1. Sur un tore complexe $S := \mathbb{C}/\Lambda$ où $\Lambda = \mathbb{Z}\,\omega_1 + \mathbb{Z}\,\omega_2$ avec $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$, on considère $2n$ points :

$$p_i = [w_i] \qquad \text{et} \qquad q_i = [w_i'] \qquad (i = 1 \cdots n),$$

où $[w]$ représente la classe, dans $\mathbb{C}/\Lambda$, d'un $w \in \mathbb{C}$. Utiliser le théorème d'Abel pour établir la proposition suivante d'analyse complexe classique : *Il existe une fonction méromorphe $f \in \mathscr{M}^*(S)$ telle que :*

$$\mathsf{div}(f) = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i \in \mathsf{Div}(S)$$

si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i' \qquad \mathsf{mod}(\Lambda).$$

Exercice 2. Soit S une surface de Riemann compacte de genre $g \geqslant 1$. On considère son image par l'application d'Abel-Jacobi :

$$\mathsf{A_J}(S) \subset \mathbb{C}^g/\Lambda = J(S).$$

Montrer que S est hyperelliptique si et seulement si cette image $\mathsf{A_J}(S) = -\mathsf{A_J}(S)$ est symétrique par rapport à l'origine.

Exercice 3. À chaque fonction continue $h \in \mathscr{C}^0(\mathsf{U})$ est associée une distribution $T_h \in \mathscr{D}'(\mathsf{U})$ définie, pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathsf{U})$, en intégrant :

$$T_h[f] := \iint_{\mathsf{U}} h(z)\, f(z)\, dx\, dy \qquad (z = x + i\,y).$$

Vérifier que l'application $h \longmapsto T_h$ est continue et linéaire et montrer qu'elle est injective.

Exercice 4. Soit $C \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ une courbe canonique de genre 5.

(a) Montrer que C est contenue dans au moins trois hypersurfaces :

$$Q_1, \qquad Q_2, \qquad Q_3$$

de degré 2 dont les équations sont linéairement indépendantes.

(b) Soit maintenant S une surface de Riemann compacte de genre 5 qui n'est pas hyperelliptique, *i.e.* par définition telle qu'il n'existe pas d'application holomorphe de degré 2 de S à valeurs dans $\mathbb{P}^1$. S'il existe plutôt une application holomorphe :

$$f\colon \quad S \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

qui est de degré 3, on dit que S est *trigonale*. Si, pour $t \in \mathbb{P}^1$ quelconque, on explicite alors le diviseur image-inverse :

$$f^{-1}(t) = p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) =: D_t \in \mathsf{Div}(S),$$

montrer que les images de ces trois points par l'application canonique $\varphi_K\colon\ S \longrightarrow \mathbb{P}^4$:

$$\varphi_K\big(p_1(t)\big), \qquad \varphi_K\big(p_2(t)\big), \qquad \varphi_K\big(p_3(t)\big),$$

sont toujours colinéaires, *i.e.* situées sur une même droite projective $L_t \subset \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ qui dépend de t.

Indication : On pourra calculer $\dim \Omega_S(D_t)$.

(c) Montrer que la réunion de ces droites L_t, lorsque t parcourt $\mathbb{P}^1$, forme une surface $E \subset \mathbb{P}^4$ égale à l'intersection :

$$Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = E.$$

(d) Montrer que si S n'est pas trigonale (et pas hyperelliptique), on a toujours :

$$\varphi_K(S) = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3.$$

Exercice 5. On considère l'application donnée en coordonnées homogènes par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ [x_0 \colon x_1] \times [y_0 \colon y_1] &\longmapsto \big[x_0 y_0 \colon x_0 y_1 \colon x_1 y_0 \colon x_1 y_1\big]. \end{aligned}$$

(a) Montrer que l'image de cette application est une hypersurface $Q \subset \mathbb{P}^3$ de degré 2 et que l'application :

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow Q$$

est un biholomorphisme.

(b) En déduire que Q contient deux familles à un paramètre de droites.

(c) Montrer que les courbes de genre 4 ont exactement deux applications trigonales.
Indication : Montrer d'abord que $\varphi_K(S) = Q \cap V$.

Exercice 6. Si $u, v \colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions sous-harmoniques et si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, montrer que $\lambda\, u + \mu\, v$, et $\max(u, v)$ sont aussi des fonctions sous-harmoniques.

Exercice 7. Soit X une surface de Riemann et soit :

$$T \colon \quad \Gamma\big(X, \Lambda^2 T_X^*\big) \longrightarrow \mathbb{C}$$

une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace des 2-formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ globales sur X qui satisfait, pour toute $g \in \mathscr{C}^\infty(X)$:

$$T\big[\partial\, \overline{\partial}\, g\big] = 0.$$

Montrer qu'il existe une fonction harmonique :

$$h \in \mathsf{Harm}(X) \subset \mathscr{C}^\infty(X)$$

telle que :

$$T[\omega] = \iint_X h\, \omega$$

pour toute 2-forme $\omega \in \Gamma\big(X, \Lambda^2 T_X^*\big)$ dont le support est *compact*. ***Indication*** : S'inspirer d'une proposition du cours.

Exercice 8. Soit X une surface de Riemann non compacte et soient $f, g \in \mathscr{O}(X)$ deux fonctions holomorphes globales n'ayant aucun zéro en commun.

(a) Montrer que la suite de faisceaux suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_X \times \mathscr{O}_X \xrightarrow{\beta} \mathscr{O}_X \longrightarrow 0,$$

où les deux applications α et β sont définies par :

$$\begin{aligned} \alpha(\psi) &:= \big(\psi\, g,\ -\psi\, f\big), \\ \beta\big(\varphi_1, \varphi_2\big) &:= \varphi_1 f + \varphi_2 g. \end{aligned}$$

(a) Montrer qu'il existe deux fonctions holomorphes $\Phi, \Psi \in \mathscr{O}(X)$ telles que :

$$\Phi\, f + \Psi\, g = 1.$$

Exercice 9. Soit X une surface de Riemann non compacte et soit D un diviseur quelconque sur X. Montrer :

(a) $H^1\big(X, \mathscr{O}_D\big) = 0$;

(b) $H^1\big(X, \mathscr{M}_X\big) = 0$.

Exercice 10. Soit X une surface de Riemann et soit :

$$f_\nu \colon \quad X \longrightarrow \mathbb{C}\big\backslash\{0,1\} \qquad\qquad (\nu \in \mathbb{N})$$

une suite de fonctions holomorphes qui ne prend jamais la valeur 0 et jamais la valeur 1. On suppose qu'il existe un point $x_0 \in X$ tel que la suite numérique :

$$\big(f_\nu(x_0)\big)_{\nu \in \mathbb{N}}$$

converge vers un certain point $c \in \mathbb{C}\big\backslash\{0,1\}$. Établir le *Théorème de Montel version « surfaces de Riemann »*, à savoir, montrer qu'il existe une suite extraite $\big(f_{\nu_k}\big)_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur les compacts de X vers une fonction holomorphe :

$$f \colon \quad X \longrightarrow \mathbb{C}\big\backslash\{0,1\}.$$

Indication : Soient les revêtements universels $\widetilde{X} \longrightarrow X$ et $\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Considérer des relèvements $\widetilde{f}_\nu \colon \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{D}$ des f_ν et appliquer le théorème classique de Montel.

Exercice 11. Soit $Y \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert, soit $a \in \partial Y$ un point du bord. On suppose qu'il existe un segment de droite entre a et un autre point $b \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$:

$$I_{a,b} := \big\{t\,a + (1-t)\,b \colon\ 0 \leqslant t \leqslant 1\big\} \subset \mathbb{C}$$

qui est entièrement contenu à l'extérieur :

$$I_{a,b} \cap Y = \emptyset.$$

Montrer alors qu'il existe une fonction-barrière en a.

Exercice 12. Soit $\mathbb{D}_R := \big\{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| < R\big\}$ et soit $u \colon\ \mathbb{D}_R \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction harmonique à valeurs positives. Établir l'*inégalité de Harnack* :

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}\,u(0) \ \leqslant\ u(z) \ \leqslant\ \frac{R+|z|}{R-|z|}\,u(0),$$

pour tout $z \in \mathbb{D}_R$.