Résultants

Exercice 1. Intersections de courbes algébriques

1. On considère les polynômes à coefficients rationnels en deux variables
$$f = (Y^2+6)(X-1) - Y(X^2+1)\,, \qquad g = (X^2+6)(Y-1) - X(Y^2+1)$$
Dans `sage`, on utilise la commande `A.<X, Y> = PolynomialRing(QQ)` pour définir `X` et `Y` comme les générateurs de l'anneau A des polynômes à deux indéterminées sur $\mathbb{Q}$. À l'aide de la commande `f.resultant(g,Y)`, qui calcule le résultant par rapport à la variable Y de f et g, déterminer l'ensemble solution :
$$S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f(x,y) = g(x,y) = 0\}\,.$$
[On pourra utiliser la syntaxe `f.subs(X=a)` pour assigner la valeur a à X dans l'expression f, ainsi que la fonction `factor` pour trouver des racines]. Donner une interprétation géométrique à cet ensemble.
2. Représenter graphiquement les courbes données par $f = 0$ et $g = 0$ sur une même fenêtre graphique $-10 \leqslant x \leqslant 10$ et $-10 \leqslant y \leqslant 10$ (voir `implicit_plot` et `show`).

Exercice 2. recherche de polynôme annulateur

1. Soient f et g deux polynômes non constants à coefficients rationnels. On fixe une racine complexe α (resp. β) de f (resp. g). Donner (sans utiliser `sage`) en fonction de α et β une racine du polynôme en la variable Z :
$$s(Z) = \mathrm{Res}_X(f(X), g(Z-X))\,.$$
2. En utilisant la question précédente, déterminer un polynôme non nul à coefficients rationnels s'annulant en $\gamma := \sqrt{2} + i\sqrt[3]{3}$. Son degré est-il minimal parmi ceux des polynômes à coefficients rationnels s'annulant en γ ?
3. Avec les notations de la questions 1., on considère maintenant le polynôme en Z :
$$\mathrm{Res}_X\left(f(X), X^{\deg(g)} g(Z/X)\right).$$
Utiliser ce polynôme pour un bon choix de f et g pour déterminer un polynôme annulateur de $(1+\sqrt[7]{2})\sqrt{2+\sqrt{5}}$. Est-il de degré minimal ?

Exercice 3. Courbe duale et bitangentes

La courbe de Trott est la courbe plane $\mathcal{T}$ d'équation
$$144(X^4+Y^4) - 225(X^2+Y^2) + 350X^2Y^2 + 81 = 0.$$
Le but de cet exercice est d'estimer le nombre de droites tangentes à $\mathcal{T}$ en au moins deux points. Pour cela on pourra introduire l'anneau $\mathbb{Q}[X,Y,A,B]$ (par une commande analogue à celle du premier exercice) pour écrire la variété d'incidence entre $\mathcal{T}$ et les droites. Pour projeter dans $\mathbb{Q}[A,B]$ un polynôme P ne faisant intervenir que A et B, on utilisera la commande `QQ['A, B'](P)`.