Prise en main du logiciel Sage – Extras

Exercice 1. On rappelle que la suite de Fibonacci (F_n) est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et par la récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Trouver des commandes `sage` permettant de déterminer les chiffres de l'écriture d'un entier a dans une base donnée ainsi que le nombre de chiffres nécessaires pour représentater a dans une telle base.
2. Déterminer l'indice du plus petit nombre de Fibonacci ayant 1000 chiffres (en base 10).
3. Déterminer la somme des nombres pairs de la suite de Fibonacci inférieurs à un million.

Exercice 2. La suite de Syracuse est définie par une condition initiale $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \text{ si } u_n \text{ est pair, } u_{n+1} = 3u_n + 1 \text{ sinon.}$$

La conjecture de Syracuse prédit que pour tout $u_0 \in \mathbb{N}^*$, le suite de Syracuse atteint la valeur 1. Pour u_0 fixé, on considère le plus petit indice n tel que $u_n = 1$ (par exemple pour $u_0 = 13$, on a $n = 10$). Déterminer la valeur de u_0 inférieure à un million pour laquelle cet indice est maximal et donner l'indice correspondant.

Exercice 3. Déterminer la somme des nombres inférieurs à 1000 qui sont divisibles par 3 ou 5.

Exercice 4. On dit qu'un nombre est un palindrome s'il ne change pas quand on reverse l'ordre de ses chiffres. Déterminer le plus grand palindrome qui peut s'écrire comme produit d'exactement deux entiers de trois chiffres. (Le plus grand palindrome qui s'écrit comme produit d'exactement deux entiers de deux chiffres est 9009.)

Exercice 5.

1. Déterminer la commande `sage` qui permet de définir le groupe symétrique.
2. Un nombre premier est dit circulaire si toute permutation de ses chiffres est encore un nombre premier. Déterminer le nombre de premiers circulaires inférieurs à un million. (Il y a 13 nombres circulaires inférieurs à 100.)