POLYNÔMES

MARIE-CLAUDE DAVID ET MYRIAM DECHAMPS

Ce document, destiné à nos collègues enseignants, réunit des exercices sur les polynômes et sur les polynômes et l'algèbre linéaire. Ils ont été utilisés par les auteurs en M1MIAS décalé de 1992 à 1995.

Contents

1. Divisibilité 2
1.1. Degré 2
1.2. Division euclidienne 2
1.3. Calcul de PGCD 2
1.4. Relation de Bezout 2
2. Décomposition en facteurs irréductibles, racines 3
2.1. Décomposition en facteurs irréductibles 3
2.2. Racines 3
3. Extraits de partiels 4
4. Polynômes et algèbre linéaire 5
4.1. Sous-espaces vectoriels de $K[X]$. 5
4.2. Bases de $K_n[X]$ 6
4.3. Polynômes d'interpolation de Lagrange 7
4.4. Applications linéaires 7
4.5. Matrices d'applications linéaires 8
4.6. Systèmes linéaires 9

Date: 3 février 2003.

1. Divisibilité

1.1. Degré.

1.1.1. Quel est le degré des polynômes P, Q, $P+Q$ et PQ si :

(a) $P(X) = 2aX^2 + a^2X + b$ et $Q(X) = cX^2 + c^2X + 4$

(b) $P(X) = aX^3 - bX^2 + cX + d$ et $Q(X) = bX^2 + c^2X$?

1.1.2. Soit P' le polynôme dérivé du polynôme P à coefficients réels. Pour α un réel fixé, on appelle $f_\alpha(P)$ le polynôme $(2X-\alpha)P(X) + (1-X^2)P'(X)$. Quel est le degré de $f_\alpha(P)$?

1.2. Division euclidienne.

1.2.1. Dans chacun des cas suivants, divisez le polynôme A par le polynôme B, trouvez le reste R et le quotient Q et vérifiez l'égalité $A = BQ + R$:

(a) $A = X^4 - X^3 + 2X^2 + X - 1$ et $B = X^2 + X - 1$.
(corrigé : $Q(X) = X^2 + X + 1$ et $R(X) = 0$)

(b) $A = X^5 + X + 1$ et $B = X^3 - X^2 + 1$.

(c) $A = X^3 + 5X^2 - 3X + 1$ et $B = X^4 + X$.
(corrigé : $Q(X) = 0$ et $R = A$)

(d) $A = X^2 - jX + 7$ et $B = jX + 1$ avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(corrigé : $Q(X) = \bar{j}X + \bar{j}R(X) = 7 - \bar{j}$)

(e) $A = iX^2 - 3jX - i$ et $B = X^3 + jX + \sqrt{2} - i$.

1.3. Calcul de PGCD.

1.3.1. Calculer le $PGCD$ des polynômes P et Q si :

(a) $P(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^2 + 2X - 1$ et $Q(X) = X^5 - 3X^3 + X^2 + 2X - 1$.

(b) $P(X) = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$ et $Q(X) = 3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$.

(c) $P(X) = X^6 + X^5 - X^4 - 2X^3 - X^2 + X + 1$ et $Q(X) = X^5 + X^3 - X^2 - 1$.

(d) $P(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q(X) = X^3 + X^2 - X - 1$.
(corrigé : $PGCD(P,Q) = X + 1$)

(e) $P(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 - 2X + 3$ et $Q(X) = X^4 + 3X^3 + 7X^2 + 8X + 6$.
(corrigé : $PGCD(P,Q) = X^2 + X + 3$)

1.3.2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les polynômes $X^7 - a$ et $X^5 - b$ soient premiers entre eux.

1.4. Relation de Bezout.

1.4.1. Etant donné deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$, le théorème de Bezout affirme que A et B sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si il existe un couple (U,V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tel que $AU + BV = 1$. On suppose que A et B sont premiers entre eux.

(a) Montrer que, si les couples (U_1,V_1) et (U_2,V_2) vérifient le théorème de Bezout pour A et B, le polynôme $V_1 - V_2$ (resp. le polynôme $U_1 - U_2$) est divisible par A (resp. B).

(b) Montrer qu'il existe un unique couple (U_0,V_0) vérifiant :

- **(i)** $AU_0 + BV_0 = 1$
- **(ii)** $\deg(U_0) < \deg(B)$
- **(iii)** $\deg(V_0) < \deg(A)$.

(c) Trouver, en fonction de (U_0,V_0), tous les couples (U,V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

(d) Que pensez-vous de cet exercice si l'équation à résoudre est $AU + BV = P$ où P est un polynôme quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

1.4.2. Soient $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 + 1$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que les polynômes A et B sont premiers entre eux et trouver des polynômes U et V tels que $UA + VB = 1$.

(corrigé : Grâce à l'algorithme d'Euclide, on peut écrire $UA + VB = 1$ avec :

$$U(X) = X^4 - X^2 + X \quad \text{et} \quad V(X) = -X^6 + X^4 - X^3 + X + 1)$$

1.4.3. *Exercice du premier test 1992-1993.* On considère les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ suivants :

$$A(X) = X^3 \quad \text{et} \quad B(X) = X^2 + 3$$

(a) Montrer que A et B sont premiers entre eux sans calculer leur $PGCD$.
(b) Trouver tous les couples (U, V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.
(c) On cherche les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X) + 1$ soit divisible par $X^2 + 3$ et $P(X) + 2$ soit divisible par X^3. Trouver les polynômes P de degré minimum vérifiant ces conditions puis tous les polynômes P.

1.4.4. *Autre version en 2.2.3*

(a) Existe-il des polynômes A et B vérifiant

$$A(X)(X-1)^3 - B(X)(X+1)^3 = 2 \text{ ?}$$

Si oui, déterminer tous les couples (A, B) possibles.
(b) Trouver tous les polynômes P tels que $P(X) + 1$ soit divisible par $(X-1)^3$ et $P(X) - 1$ soit divisible par $(X+1)^3$.

2. Décomposition en facteurs irréductibles, racines

2.1. **Décomposition en facteurs irréductibles.**

2.1.1. Ecrire la décomposition en polynômes irréductibles de $X^6 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

2.1.2. Décomposer en polynômes irréductibles le polynôme $X^5 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2.1.3. Montrer que les polynômes X^m et $(1 - X)^n$ sont premiers entre eux.

2.1.4. Montrer que le polynôme $X^3 + 5$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2.1.5. Considérons les polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$A(X) = (X+3)(X+2)(X^2+1)^2$$
$$B(X) = (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1)$$
$$C(X) = (X+3)^3(X+1)(X^2+1)^3$$

(a) Combien A possède-t-il de diviseurs unitaires ? et B ? et C ?
(b) Ecrire le $PGCD$ et le $PPCM$ de A et B.
(c) Ecrire le $PGCD$ et le $PPCM$ des trois polynômes A, B et C. (On généralise facilement les définitions et résultats donnés pour deux polynômes au cas de plusieurs polynômes).

2.2. **Racines.**

2.2.1. Chercher les racines multiples du polynôme P si :

(a) $P(X) = X^3 - 5X^2 + 3X + 9$.
(b) $P(X) = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$.
(c) $P(X) = X^5 - X^3 - 4X^2 - 3X - 2$.
En déduire la décomposition de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

2.2.2.

(a) Quelles sont les racines du polynôme $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{C}$? Ecrire quelques relations simples faisant intervenir ses racines, leurs puissances ou leurs conjugués.

(b) Pour quelles valeurs de n, le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$?

2.2.3. *Autre version en 1.4.4*

Trouver tous les polynômes P tels que $P(X) + 1$ soit divisible par $(X - 1)^3$ et $P(X) - 1$ soit divisible par $(X + 1)^3$ par les deux méthodes suivantes :

(a) En utilisant la relation de Bezout,

(b) En considérant le polynôme dérivé.

2.2.4. Déterminer les entiers naturels n tels que $P(X) = (X - 1)^n - X^n + 1$ ait une racine double dans $\mathbb{C}$.

2.2.5. Pour $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - \lambda$, déterminer λ de façon que P ait (au moins) une racine multiple et calculer cette racine.

2.2.6. Soient $P(X)$ le polynôme $X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ et j le complexe $\exp(\frac{2i\pi}{3})$.

(a) Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.

(b) Quelle conséquence quant à ses racines peut-on tirer de la parité de P ?

(c) Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2.2.7. Soit $P(X) = a_n X^n + ... + a_0$ un polynôme de degré n à coefficients entiers.

(a) Montrer que si le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$, $(p, q) = 1$) est racine de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

(b) *Application :* Chercher les racines rationnelles des polynômes suivants :

$$A(X) = X^3 - X^2 - X - 2 \qquad B(X) = 6X^3 + 7X^2 - 9X + 2$$

2.2.8. Soient $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $P_a(X)$ le polynôme $X^3 + 2aX^2 + a^2X + b$. Déterminer les valeurs de b (s'il en existe) pour lesquelles P_a a une racine multiple. Quelle est, dans chacun des cas, la valeur de cette racine et sa multiplicité exacte ?

2.2.9. Soit $P(X) = 2X^6 - 13X^5 + 15X^4 + 80X^3 - 280X^2 + 336X - 144$.

(a) Quelle est la multiplicité de la racine 2 ?

(b) Déduire d'une formule de Taylor pour P sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.

2.2.10. Soit un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x)$ soit positif ou nul pour tout réel x.

(a) Montrer qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

(b) Montrer que si un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ a tous ses coefficients positifs, il existe des polynômes A, B, C et D dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2 + X(C^2 + D^2)$.

3. Extraits de partiels

3.0.11. *Exercice du premier partiel M1AL 1992-1993.*

(a) Déterminer les racines entières du polynôme $P(X) = X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 6X + 9$.

(b) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

(c) En déduire une factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ du polynôme :

$$Q(X) = X^8 - 6X^6 + 10X^4 - 6X^2 + 9.$$

3.0.12. *IV. du partiel de M1A 1989-1990.* Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré au moins 1 et r et s deux entiers strictement positifs.

- **(a)** Trouver le reste et le quotient de la division euclidienne du polynôme $X^{2r}-1$ par $X+1$ (réfléchir ou calculer, il faut choisir).
- **(b)** Soit $Q = P+1$. Montrer que P et Q sont premiers entre eux.
- **(c)** Soit $R = P^{2r} + Q^s - 1$. Montrer que R est divisible par P et Q.
- **(d)** Montrer que R est divisible par PQ.
- **(e)** Application
  - **(i)** Montrer que le polynôme $S = X^4 - 2X^3 + \frac{5}{2}X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{11}{16}$ peut s'écrire $(X+a)^4 + (X+b)^2 + c$ où a, b, c sont des constantes que l'on déterminera.
  - **(ii)** Calculer toutes les racines de S.
  - **(iii)** Soit $T = X^4 + \frac{1}{2}X^3 - \frac{5}{4}X^2 + \frac{39}{8}X + \frac{11}{4}$; calculer le $PGCD$ de S et T.

3.0.13. *Exercice du premier partiel M1A 1991-1992.* Dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$A(X) = X^4 + X^3 - 5X^2 + X - 6 \quad \text{et} \quad B(X) = 4X^4 + 2X^3 + 2X - 4.$$

- **(a)** Calculer le $PGCD$ de A et B.
- **(b)** Ecrire A comme un produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$.
- **(c)** Montrer qu'il existe exactement deux valeurs du nombre réel a tels que le polynôme :

$$Q(X) = \frac{X^5}{5} + \frac{X^4}{4} - \frac{5X^3}{3} + \frac{X^2}{2} - 6X + a$$

admette une racine double dans $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de calculer a).

4. Polynômes et algèbre linéaire

Cette partie rassemble des exercices d'illustration des notions d'algèbre linéaire qui utilisent les espaces vectoriels de polynômes, ils sont traités au fur et à mesure de l'avancement du cours d'algèbre linéaire.

4.1. **Sous-espaces vectoriels de $K[X]$.**

4.1.1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}$, déterminer ceux des sous-ensembles suivants qui sont des sous-espaces vectoriels

- **(a)** $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(P) = n\}$
- **(b)** $\{\lambda X^n \mid \mathbb{C}\}$
- **(c)** $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$

4.1.2. Dans le sous-espace E_5 des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 5, on définit les sous-espaces vectoriels suivants :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{P \in E_5 / P(0) = 0\} \\
F_2 &= \{P \in E_5 / P'(1) = 0\} \\
F_3 &= \{P \in E_5 / X^2 + 1 \text{ divise } P\} \\
F_4 &= \{P \in E_5, \ ; \forall x \in \mathbb{R} \ ; P(x) = P(-x)\} \\
F_5 &= \{P \in E_5 / P(X) = XP'(X)\}
\end{aligned}$$

- **(a)** Déterminer des bases de F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, $F_1 \cap F_2, F_1 \cap F_3, F_1 \cap F_2 \cap F_3, F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4$.
- **(b)** Déterminer dans E_5 des sous-espaces supplémentaires de E_4 et de $E_1 \cap E_3$.

4.1.3. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(X) = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et donner une base de F (suggestion : surtout, ne pas vérifier les 2 ou 3 conditions des sous-espaces vectoriels).

4.2. **Bases de $K_n[X]$.** On note E_n le sous-espace vectoriel $K_n[X]$ de $K[X]$ des polynômes de degré au plus n. Le cas échéant, on précisera si K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La **valuation** d'un polynôme non nul P de $K[X]$, $P(X) = a_pX^p + \ldots + a_0$ est le **plus petit indice** k tel que $a_k \neq 0$.

4.2.1. Soit $\mathcal{P} = \{P_k, 0 \leq k \leq n\}$ une famille de $n+1$ polynômes de $K[X]$. On suppose que leurs degrés (resp. valuations) sont deux à deux entier(e)s et distinct(e)s.

(a) Montrer que $\mathcal{P}$ est libre. Que peut-on en déduire sur la dimension de $K[X]$?
(b) Si $\mathcal{P}$ est contenue dans E_n, montrer que P est une base du sous-espace E_n.

4.2.2. *Applications.*

(a) Formule de Taylor pour les polynômes. Soit $a \in K$ fixé. Montrer que pour tout polynôme P de E_n , il existe des scalaires uniques $\lambda_0, ..., \lambda_n$ que l'on déterminera, tels que :
$$P(X) = \lambda_0 + \lambda_1(X-a) + \lambda_2(X-a)^2 + ... + \lambda_n(X-a)^n$$
(b) Soit P un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que P et ses n polynômes dérivés $P', ...P^{(n)}$ forment une base de E_n.
(c) Dans E_n, on définit, pour tout entier k ($0 \leq k \leq n-1$), le polynôme $P_k(X) = X^k + X^{k+1}$. La famille $\mathcal{P} = \{P_k, 0 \leq k \leq n-1\}$ est-elle libre ? Est-ce une base de E_n ? Si cela est possible et nécessaire, compléter $\mathcal{P}$ en une base de E_n.

4.3. **Polynômes d'interpolation de Lagrange.** Ici $K = \mathbb{R}$.

4.3.1. Si $P \in E_1$, on note $d(P)$ la droite affine d'équation $y = P(x)$. Soient a_1 et a_2 deux réels distincts. On appelle D_1 (resp. D_2) la droite d'équation : $x = a_1$ (resp. $x = a_2$).

(a) En remarquant qu'une droite $d(P)$ est entièrement déterminée par ses points d'intersection avec D_1 et D_2 , justifier le fait qu'un polynôme P est entièrement déterminé par les réels $P(a_1)$ et $P(a_2)$.
(b) Soient P_1 et P_2 les polynômes définis par :
$$P_1(X) = \frac{(X-a_2)}{(a_1-a_2)} \quad \text{et} \quad P_2(X) = \frac{(X-a_1)}{(a_2-a_1)}$$
Montrer que si $P(x)$ est le polynôme $b_1P_1(X) + b_2P_2(X)$, on a :
$$P(a_1) = b_1 \qquad P(a_2) = b_2$$
et $d(P)$ est la droite passant par les points (a_1, b_1) et (a_2, b_2).
(c) Conclure : Que pouvez-vous dire du système (P_1, P_2) dans l'espace E_1 ?
(d) Application : Soient a et b deux réels distincts et Q un polynôme de degré quelconque. Calculer le reste de la division de Q par le polynôme $(X-a)(X-b)$ en fonction de $Q(a)$ et $Q(b)$.

4.3.2. Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts. Les polynômes P_1, P_2, P_3 sont définis par :
$$\begin{aligned} P_1(X) &= \frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} \\ P_2(X) &= \frac{(X-a_3)(X-a_1)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)} \\ P_3(X) &= \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} \end{aligned}$$

(a) Montrer que si $P(X)$ est le polynôme $b_1P_1(X) + b_2P_2(X) + b_3P_3(X)$, alors on a :
$$P(a_1) = b_1 \quad P(a_2) = b_2 \quad P(a_3) = b_3.$$

(b) Montrer que si Q appartient à E_2 avec $Q(a_1) = Q(a_2) = Q(a_3) = 0$, alors Q est le polynôme nul.
(c) En déduire que $b_1P_1(X) + b_2P_2(X) + b_3P_3(X)$ est l'unique polynôme de degré au plus deux vérifiant $P(a_1) = b_1, P(a_2) = b_2, P(a_3) = b_3$. Le résultat est-il encore vrai si on ne fait plus d'hypothèse sur le degré ?
(d) Conclure : Que pouvez-vous dire du système (P_1, P_2, P_3) dans l'espace E_2 ?
(e) Si $P \in E_2$, on note $p(P)$ la parabole (qui peut dégénérer en une droite) d'équation : $y = P(x)$. Interpréter géomètriquement les résultats précédents.
(f) *voir une autre interpétation en 4.4.1*

4.4. **Applications linéaires.**

4.4.1. *(peut être vu comme une application de 4.3)*
Soient a, b, c trois réels. On définit l'application U de E_2 dans $\mathbb{R}^3$ par :

$$U(P) = (P(a), P(b), P(c)).$$

(a) Montrer que U est une application linéaire.
(b) Déterminer le noyau de U et son image. Dans quel cas U est-elle bijective ?
(c) Si U est bijective, trouver les antécédents de $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ par U.

4.4.2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $f(P)$ le polynôme défini par :

$$f(P)(X) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X)$$

(a) Montrer que f est une application linéaire.
(b) Déterminer le degré de $f(P)$ en fonction du degré de P. En déduire le noyau de f et son image.
(c) Peut-on trouver des valeurs de n telles que f soit un endomorphisme de E_n? Si n_0 est une telle valeur, que peut-on dire de la restriction de f à E_{n_0} ?

4.4.3. Dans E_n, on définit, pour tout entier k $(0 \leq k \leq n-1)$, le polynôme $P_k(X) = X^k + X^{k+1}$.
(a) La famille $\mathcal{P} = \{P_k, 0 \leq k \leq n-1\}$ est-elle libre ? Est-ce une base de E_n ? Si cela est possible et nécessaire, compléter $\mathcal{P}$ en une base de E_n (cf. 4.2.2).
(b) Soit φ la forme linéaire sur E_n définie par :

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

(c) Montrer que le noyau de φ est le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{P}$.
(d) Trouver un supplémentaire de $\ker \varphi$.

4.4.4. Soit f l'endomorphisme de E_n défini par :

$$f(P)(X) = (X - a)(P'(X) + P'(a)) - 2(P(X) - P(a))$$

(a) Vérifier que f est linéaire.
(b) Montrer que $\{(X - a)^k, 0 \leq k \leq n\}$ est une base de E_n (cf. refbases).
(c) Trouver une base de $\operatorname{Im} f$. En déduire que $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des polynômes qui admettent a comme racine d'ordre au moins.
(d) Donner une base du noyau de f.

4.4.5. *Extrait du partiel M_1A du 25 avril 1988.* On considère l'application linéaire f de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}^3$ qui à un polynôme P associe le triplet $(P(1), P'(1), P(2))$.

(a) Déterminer $\ker f$.
(b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Trouver un polynôme S nul ou de degré ≤ 2 tel que $f(S) = (a, b, c)$. Un tel polynôme est-il unique ?
(c) Donner le reste de la division euclidienne d'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ par $(X-1)^2(X-2)$ en fonction de $P(1), P'(1), P(2)$.

4.5. **Matrices d'applications linéaires.**

4.5.1. Soit $E_n = \{P \in \mathbb{C}[X], d^\circ P \leq n\}$. Ecrire la matrice, dans la base $\{1, X, X^2, \dots X^n\}$, de l'endomorphisme D de E_n qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

4.5.2. Soit E_3 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit T l'application définie pour tout P de E_3 par :

$$T(P)(X) = (X^2 - 1)P''(X) - 2XP'(X) + 2P(X)$$

(a) Montrer que T est un endomorphisme de E_3.
(b) Ecrire la matrice de T dans la base canonique $\{1, X, X^2, X^3\}$ de E_3.
(c) Déterminer le rang de T, une base de son image et une base de son noyau.
(d) Soit $Q(X) = X^3 - 3X + 1$. Trouver l'ensemble des solutions de l'équation $T(P) = Q$. Montrer que l'ensemble des solutions divisibles par $X - 1$ est une droite affine de E_3 que l'on déterminera.

4.5.3. On pose $\mathcal{B} = \{P_0, P_1, P_2\}$ avec

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X - \frac{1}{2}, \quad P_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{2}$$

(a) $\mathcal{B}$ est-elle une base de E_2 (cf 4.2.2) ?
(b) Montrer que l'application φ définie sur E_2 par :

$$\varphi(P)(X) = (X - \frac{1}{2})P'(X) + \frac{1}{4}P''(X) \quad (P \in E_2)$$

est un endomorphisme de E_2.
(c) Préciser le noyau et l'image de φ.
(d) Ecrire la matrice de φ par rapport à la base canonique de E_2, puis par rapport à $\mathcal{B}$.
(e) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(P) = X^2$.

4.6. **Systèmes linéaires.**

4.6.1. Soit E_3 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Posons :

$$P_1(X) = X^3 + iX^2 - X + 2 \quad P_2(X) = X^3 + (1+i)X^2 - X + 2 + i.$$

(a) Peut-on compléter $\{P_1, P_2\}$ en une base (P_1, P_2, P_3, P_4) de E_3 telle que $\deg(P_3) = \deg(P_4)$?

4.6.2.

(a) Résoudre, dans $\mathbb{R}[X]$, l'équation :

$$P(X) - P'(X) = X^5 + 2X^3 - X^2 + 4.$$

(b) Soit E_n le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soient les endomorphismes de E_n définis par :

$$u(P) = P - P' \quad \text{et} \quad v(P) = P'.$$

Montrer que u est un isomorphisme et calculer u^{-1} en fonction de v (indication : on pourra développer $(1-v)(1+v+v^2+\ldots+v^n)$). Résoudre à nouveau l'équation de la question (a).

(c) Quelle méthode choisir pour résoudre l'équation :

$$P(X) - P'(X) = X^7?$$

Mathématique, Bât. 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex.