Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

Mathématiques
Fête de la Science 2009

Atelier Polyèdres au bâtiment 425

Présentation de l'atelier

1. **Des polygones réguliers aux solides de Platon puis au ballon de football.** *niveau collèges (à partir de la 6ème) et lycées.*

Cet atelier est consacré aux polygones réguliers et aux deux conditions qui les caractérisent. Nous chercherons à construire avec des faces "polygones réguliers" des solides très réguliers. Nous mettrons en évidence deux conditions qui les caractérisent et nous ferons la liste des cas possibles : les solides de Platon. Nous construirons ceux-ci et d'autres avec des polydrons. Nous compterons leurs éléments : faces, sommets et arêtes. Nous ferons également une approche de la formule d'Euler. Nous en fabriquerons en pliage et pourrons ainsi tronquer pour obtenir des polyèdres semi-réguliers tel qu'un ballon de football. Les élèves devront apporter quelques crayons de couleur et des ciseaux. Par Marie-Claude David.

Trame pour l'atelier

Le matériel est soit en carton, soit en pliage, soit en polydron. (voir VI). Le programme est trop ambitieux pour une heure.

I. Des polygones aux polyèdres

1. Faire deviner les deux conditions pour qu'un polygone soit régulier.

Matériel : polygone quelconque, polygone quelconque convexe, triangle équilatéral, losange, carré.

Partie importante

2. **Pyramide.** Un polygone est plan, on ajoute un sommet au-dessus et on obtient un polyèdre, plus particulièrement une pyramide.

Matériel : Pyramide à base triangulaire (tétraèdre), carrée (Egypte), pentagonale (en vue de l'icosaèdre) = 8 T, 1C, 1P et 5 triangles vides.

3. **Prisme et antiprisme.** On utilise deux mêmes polygones décalés qu'on joint par des carrés (prisme) ou des triangles (antiprisme).

Matériel : prisme à base triangulaire, pentagonale, antiprisme à base carrée, pentagonale. 20T, 10C, 2P

II. Polyèdres réguliers

1. **Deux polyèdres à faces triangulaires.** Deux tétraèdres collés et un octaèdre : Quel est le plus régulier ? Un polyèdre est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers avec le même nombre de côtés et en chaque sommet aboutit le même nombre de faces.

Matériel : le double tétraèdre et l'octaèdre : 14 T

2. **Possibilités.** Avec cette définition de polyèdre régulier, construire tous les cas possibles. Remarquer que l'angle augmente avec le nombre de côtés. Tétraèdre, octaèdre, icosaèdre, cube et dodécaèdre. Ce sont les 5 polyèdres de Platon connus depuis l'antiquité. Expliquer les nom et les montrer écrits sur le poster de Guillaume.

Matériel : 32T, 6C, 12P

Le message à faire passer est "seulement 5 réguliers". Une bonne utilisation du poster a fait venir la question sur le symbole. Cette notion peut être exploitée ensuite.

L'icosaèdre est plus facile à construire avec les triangles ajourés qui sont plus faciles à enclencher avec les doigts à l'intérieur.
Ceux qui ont pour mission de construire un polyèdre avec 3 hexagones, 4 carrés ou 6 triangles en un sommet sont assez déçus de leur carrelage. Leur rôle doit être valorisé, ce sont eux qui prouvent le "seulement".

3. **Dualité.**

III. Formule d'Euler

Reprendre tous les polyèdres construits et remplir le tableau des nombres de faces, sommets et arêtes (voir figure 1). Aider à un dénombrement intelligent en décrivant les polyèdres : l'octaèdre est fait de deux pyramides, un dé a 6 faces, un icosaèdre est fait d'un antiprisme et de deux pyramides. Quelle aide apporte la dualité ?

À la recherche de la formule d'Euler

Trouver une relation simple entre le nombre s de sommets, le nombre f de faces et le nombre a d'arêtes.

Polyèdre	s, **nombre de sommets**	f, **nombre de faces**	a, **nombre d'arêtes**
Tétraèdre			
Cube			
Octaèdre			
Pyramide à base carrée			
Pyramide à base pentagonale			
Prisme à base triangulaire			
Prisme à base pentagonale			
Antiprisme à base carrée			
Antiprisme à base pentagonale			
Dodécaèdre			
Icosaèdre			

Laboratoire de mathématiques, bât. 425, Orsay

Figure 1. Fiche distribuée

IV. Pliage

Les pliages sont extraits de l'ouvrage : *Pliages et Mathématiques* de Didier Boursin et Valérie Larose (Editions du Kangourou).

Plier un tétraèdre avec un feuille A4 et un cube avec une enveloppe.

V. Polyèdres semi-réguliers

Remarquer que le ballon de foot est un icosaèdre tronqué. La présentation des polyèdres tronqués peut se faire sur le poster Kangourou.

1. **Retour sur les pyramides et les prismes, antiprismes.** faire deviner que ces derniers ont tous leurs sommets semblables.

2. **Cuboctaèdre.** Proposer de rectifier le cube (un sur deux) en papier en coloriant les faces puis en essayant de le construit en polydrons (cuboctaèdre). Aux élèves de dire de quels morceaux ils ont besoin. Matériel : 8T , 6C

3. **Tronquer un tétraèdre.** En découpant vraiment les pyramides à enlever au sommet. Faire en polydrons le tétraèdre tronqué. Matériel : 4T, 4H

4. **Tronquer un icosaèdre.** Quelles faces ? combien ? montrer les ballons de foot
   Matériel : en papier.

5. **Octaèdre.** Faire un octaèdre en pliage à partir d'une enveloppe, dessiner les faces de l'octaèdre rectifié, reconnaître un cuboctaèdre et revenir sur la dualité.

VI. Matériel

1. **Polydrons.** un set de classe contient : 40C, 100T, 24P
   les Hexagones se vendent par 20.
   Matériel nécessaire pour l'atelier tel qu'il est présenté.
   – Triangles = 8+20+14+32+16+4 = 94 par groupe et 5 vides par groupe.
   – Carrés = 35 par groupe
   – Pentagones = 15 par groupe
   – Hexagones = 12 par groupe

2. **Polygones, polyèdres papier et autres.**
   – polygone quelconque, polygone quelconque convexe, triangle équilatéral, losange, carré.
   – 1 ballon de foot et icosaèdre avec les pyramides à tronquer.
   – polyèdres en dualité
   – gadget de forme polyèdrale

3. **Documents.**
   – 1 poster Guillaume par groupe + 1 à donner par classe
   – 1 poster Kangourou par groupe
   – Fiches Formule d'Euler
   – 30 feuilles
   – 60 enveloppes
   – fullerene, cristallographie
   – références

VII. Références pour les professeurs accompagnateurs

A l'adresse `http://wims.u-psud.fr/wims/wims.cgi?module=U1/geometry/docpolyedsemireg.fr`, vous trouverez un document qui reprend et complète l'atelier.

Les références du document renvoient en particulier
– au livre de pliage d'où viennent les pliages de l'atelier,
– au site de la librairie Kangourou pour des fascicules de patrons,
– à un site où télécharger des patrons.

Les polydrons sont vendus par Didacto (http ://www.didacto.com/) qui nous en a prêté un seau pour la Fête de la Science.

L'affiche qui vous est remise est l'œuvre de Guillaume Dufour, doctorant au laboratoire de mathématique. Elle est disponible à l'adresse `http://www.math.u-psud.fr/~ecdoct/ecdoct/infos/polyedres.php`.