

Feuille d'exercices n°2
INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES

Exercice 1 - *Quelques intégrales doubles.*

Dessiner les domaines d'intégration et calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \iint_D (1 - x - y) \, dx dy$ pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 1\}$,

2. $I_2 = \iint_D \frac{xy^2}{1+x^2} \, dx dy$ pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$,

3. $I_3 = \iint_D e^{y-x} \, dx dy$ pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\}$,

4. $I_4 = \iint_D \frac{2x}{1+x^2+y} \, dx dy$ pour $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 2 - *Symétries dans une intégrale.*

Soit $f : R_a \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le carré $R_a = [-a, a] \times [-a, a] \subset \mathbb{R}^2$.

1. Montrer à l'aide de Fubini que

$$\iint_{R_a} f(x, -y) \, dx dy = \iint_{R_a} f(x, y) \, dx dy.$$

Montrer de même que

$$\iint_{R_a} f(-x, y) \, dx dy = \iint_{R_a} f(x, y) \, dx dy \quad \text{et} \quad \iint_{R_a} f(-x, -y) \, dx dy = \iint_{R_a} f(x, y) \, dx dy.$$

2. Montrer que $\iint_{R_a} f(x, y) \, dx dy = \iint_{R_a} f(y, x) \, dx dy$.

Indication. La symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, $(x, y) \mapsto (y, x)$, est une isométrie.

3. *Illustration.* Calculer

$$\iint_{R_{2022}} x^{20} y^{22} \sin(x^{20} y^{21}) \, dx dy \quad \text{et} \quad \iint_{R_{2022}} (x - y)^{2021} e^{xy} \, dx dy.$$

4. *Illustration (bis).* Montrer sans calcul que l'abscisse du centre de gravité du domaine D_3 de l'**Exercice 6** (de la feuille 1) est nul.

Indication. On fera attention au fait que D_3 n'est pas un rectangle.

Exercice 3 - *Translations, homothéties.*

On considère le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Représenter D et montrer que D est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

2. Calculer les intégrales $I = \iint_D x \, dx dy$ et $J = \iint_D y \, dx dy$.

Indication. On pourra utiliser l'**Exercice 2** pour se faciliter la vie.

3. En déduire les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité du domaine D supposé homogène. Pour a, b et r paramètres réels donnés, on considère maintenant le domaine

$$D_{a,b,r} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a, (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}.$$

4. Déterminer, en s'aidant d'une translation et d'une homothétie, les intégrales

$$I_{a,b,r} = \iint_{D_{a,b,r}} x \, dx \, dy \quad \text{et} \quad J = \iint_{D_{a,b,r}} y \, dx \, dy.$$

Exercice 4 - Domaines en coordonnées polaires.

Représenter chacun des domaines $D_i \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ suivants; pour chacun d'eux donner un domaine $\Delta_i \subset \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ tel que l'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ réalise une bijection de $\Delta_i \setminus \{r = 0\}$ sur $D_i \setminus \{(0, 0)\}$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}, \\ D_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0\}, \\ D_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \leq \sqrt{3}x, x \leq \sqrt{3}y\}, \\ D_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

Exercice 5 - Calculs d'intégrales en coordonnées polaires.

- Calculer $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
- Calculer l'aire des domaines D_i de l'**Exercice 4**.
- Calculer $\iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x, y \leq x\}$.

Exercice 6 - Dilatations et centre de gravité.

Soit φ la dilatation de \mathbb{R}^2 , $\varphi : (x', y') \mapsto (x = ax', y = by')$ avec $a, b > 0$.

- Montrer que $\psi = \varphi^{-1}$ est une dilatation de \mathbb{R}^2 .
- Rappeler les jacobiens respectifs de φ et de ψ .

On suppose que la restriction de ψ au domaine régulier Δ induit une bijection $\psi : \Delta \rightarrow D$ où D est un domaine régulier.

- Montrer que les centres de gravité de Δ et de D se correspondent par φ .

Soit D le disque (plein) de \mathbb{R}^2 de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, $D = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid (x')^2 + (y')^2 \leq 1\}$ et $\mathcal{E}_{a,b}$ l'ellipse (pleine) $\mathcal{E}_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. On suppose ces domaines homogènes.

- Montrer que φ induit une bijection entre D et $\mathcal{E}_{a,b}$.
- En utilisant la question **3.** ci-dessus, déterminer les coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{E}_{a,b}$.
- Calculer l'abscisse du centre de gravité de $D^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ en passant aux coordonnées polaires.
- En considérant la symétrie $(x, y) \mapsto (y, x)$, déterminer l'ordonnée de son centre de gravité.
- En utilisant **3.**, déterminer les coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{E}_{a,b}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Exercice 7 - Intégrales triples et pyramide.

1. Représenter le domaine $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

2. En découpant en tranches horizontales, calculer le volume de D .

Indication. Calculer l'aire d'une tranche horizontale, à l'aide d'une homothétie (ou de Thalès).

3. Esquisser une preuve de la généralisation au volume d'une pyramide P (possiblement penchée), de hauteur h et de base un domaine régulier de \mathbb{R}^2 d'aire A .

On suppose D homogène et on appelle G son centre de gravité.

4. Calculer l'intégrale $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$; en déduire que la hauteur de G est $\frac{1}{4}$.

5. Esquisser une preuve du fait que la hauteur du centre de gravité de la pyramide générale P de la question 3., supposée homogène, est $\frac{h}{4}$.

6. On admet que l'application $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(x, y, z) = (z, y, x)$ est une symétrie. Montrer que D est invariant par ψ et en déduire $\iiint_D x \, dx \, dy \, dz$.

7. Donner les coordonnées du centre de gravité de D , supposé homogène.

8. Soit φ la dilatation de \mathbb{R}^3 définie par $\varphi(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$. Déterminer et représenter l'image de D par φ et donner (sans calculs) les coordonnées de son centre de gravité.

Indication. On pourra s'inspirer de l'**Exercice 6**.

Exercice 8 - Une intégrale triple sur le cube.

Pour $\theta \in \mathbb{R}^+$, on note par \mathcal{C}_θ le cube $[0, \theta] \times [0, \theta] \times [0, \theta]$.

1. Calculer $I(\theta) = \iiint_{\mathcal{C}_\theta} \sin(x + y + z) \, dx \, dy \, dz$ en fonction de θ .

2. Quel est le signe de $I(1)$?

Exercice 9 - Coordonnées cylindriques.

1. Représenter $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$ et calculer son volume en utilisant le théorème de Fubini en tranches horizontales.

2. Calculer le même volume en coordonnées cylindriques.

3. Déterminer le centre de gravité de sa moitié supérieure, $D^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1 + z^2\}$, supposée homogène.

Indication. On pensera aux axes de symétries pour déterminer x_G et y_G .

4. Calculer le moment d'inertie de D en rotation autour de l'axe Oz : $\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$.

Exercice 10 - Coordonnées sphériques.

Calculer l'intégrale de f sur le domaine D avec

1. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ et $f(x, y, z) = xyz$,

2. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ et $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$, pour $\alpha = 1$ et -1 .

EXERCICES BONUS

Exercice 11 - Centres de gravité.

Calculer le centre de gravité des domaines D suivants, supposés homogènes :

1. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, |y| \geq ax\}$ où a est un réel strictement positif.

2. $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, (x - 1)^2 + y^2 \geq 1\}$.

Indication. (cf. cours – utiliser la propriété de barycentre du centre de gravité!)

Exercice 12 - Coordonnées polaires (difficile !!)

1. Dessiner le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$.

Indication. On remarquera que $x^2 + y^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - 1$.

2. Déterminer un domaine « polaire » Δ correspondant à D (au sens de l'**Exercice 4**).

Indication. On se rappellera que si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, ce triangle est rectangle. (Ainsi que sa trigonométrie du triangle rectangle...)

3. Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ en coordonnées polaires.

Indication. On utilisera une intégration par parties pour « remplacer » arccos par sa dérivée sous l'intégrale, puis le changement de variable $u = r^2$ pour calculer cette dernière.