PeiP 1A/2C
Mathématiques 2

Polytech Paris-Saclay
2021–2022

Contrôle 1

durée : 1h30 – date : 25/02/2022

Exercice 1.

La fonction $(x,y) \mapsto \frac{y}{(1+x^2)(2-y^2)}$ est continue et ses variables sont séparables sur le rectangle $[0,1]\times[0,1]$ de $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Fubini dans ce cas particulier,

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{y}{(1+x^2)(2-y^2)}\,dxdy = \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\right)}_{J} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{y}{2-y^2}\,dy\right)}_{K}.$$

Pour calculer J, on remarque que l'intégrande est la dérivée de $x \mapsto \arctan x$:

$$J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_0^1 = \big(\arctan(1) - \arctan(0)\big) = \frac{\pi}{4}.$$

De même, pour calculer K, on remarque que l'intégrande est la dérivée de $x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\big(|2-y^2|\big)$:

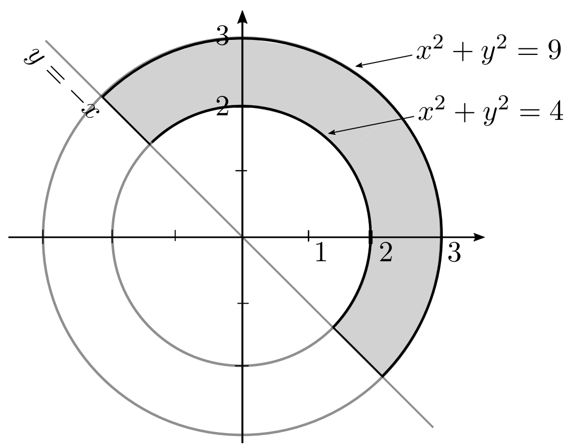
$$K = \int_0^1 \frac{y}{2-y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{2}\ln(2-y^2)\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\big(\ln(1)-\ln(2)\big) = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Finalement, $I = J\cdot K = \boxed{\frac{\pi\ln(2)}{8}}$.

Exercice 2.

1. L'encadrement $4 \le x^2+y^2 \le 9$ correspond à deux inégalités : être à l'extérieur (resp. intérieur) du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 2 (resp. 3).

D se trouve donc dans l'anneau délimité par ces deux cercles. Il ne reste qu'à tracer la droite d'équation $y=-x$ pour déterminer le demi anneau qui nous intéresse.



2. La symétrie par rapport à la droite D' d'équation $y=x$ est définie par $\mathcal{S}(x,y)=(y,x)$. Comme

$$4 \le x^2+y^2 \le 9 \iff 4 \le y^2+x^2 \le 9,$$
$$\text{et } x+y \ge 0 \iff y+x \ge 0$$

$(x,y)\in D$ si et seulement si $\mathcal{S}(x,y)\in D$: $\boxed{D \text{ est symétrique par rapport à } D'}$.

3. Le changement de variable via $\mathcal{S}$ donne $\iint_{\mathcal{S}(D)} y\,dxdy = \iint_D x'\cdot J_{\mathcal{S}}(x',y')\,dx'dy'$.
Comme $\mathcal{S}(D)=D$ par la question **2.** et que le jacobien $J_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$ est la fonction constante égale à 1 (comme toute isométrie), on en déduit l'égalité $\boxed{\iint_D y\,dxdy = \iint_D x\,dxdy}$.

4. On remarque que D correspond à un rayon r compris entre 2 et 3 et un angle θ compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$. On en déduit $\boxed{\Delta = [2,3]\times[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]}$.

5. On utilise la formule de changement de variable vers les coordonnées polaires :

$$\iint_D y\,dxdy = \iint_\Delta (r\sin\theta)\cdot r\,drd\theta = \left(\int_2^3 r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta\right)$$

où la dernière égalité vient du théorème de Fubini dans le cas séparé.
On obtient donc $\iint_D y\,dxdy = \left[\frac{r^3}{3}\right]_2^3 \cdot \big[-\cos\theta\big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \left(\frac{27}{3}-\frac{8}{3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{19\sqrt{2}}{3}}$.

6. Pour déterminer y_G, il reste à calculer $\iint_D dxdy$. On procède comme ci-dessus :

$$\iint_D dxdy = \iint_\Delta r\,drd\theta = \left(\int_2^3 r\,dr\right)\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta\right) = \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^3 \cdot \big[\theta\big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{2}.$$

Comme D est supposé homogène de densité 1, $y_G = \frac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{19\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{5\pi} = \frac{38\sqrt{2}}{15\pi}$.

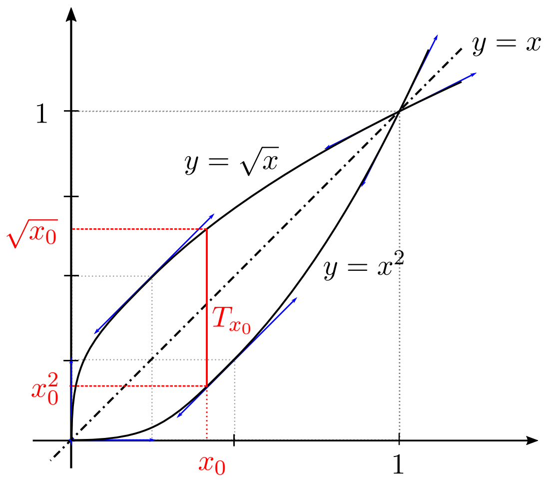
Avec la question **3.**, on obtient $\boxed{x_G = y_G = \frac{38\sqrt{2}}{15\pi}}$.

Exercice 3.

1. Pour tracer D un peu proprement, on a fait apparaître en bleu plusieurs tangentes : en 0, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ respectivement, et 1. Comme $x \in [0,1]$, l'encadrement de y donne également $y \in [0,1]$ et donc D est l'intérieur de « l'œil » ci-contre.

Comme D est *un domaine élémentaire découpé en tranches verticales*, on calcule son aire grâce au Théorème A en tranches verticales (on a représenté une tranche verticale au-dessus de x_0 en rouge) :

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx dy = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$



2. Soit D^+ et D^- les parties du carré $C = [0,1]^2$ situées respectivement au-dessus et en-dessous de D. Par le Théorème B d'additivité de l'aire des domaines réguliers : $\mathcal{A}(C) = \mathcal{A}(D^+) + \mathcal{A}(D) + \mathcal{A}(D^-)$.

Comme l'aire de C est de 1, et que l'aire de D est de $\frac{1}{3}$, il suffit de vérifier que l'aire de D^+ ou celle de D^- est de $\frac{1}{3}$. On procède comme ci-dessus :

$$\mathcal{A}(D^-) = \iint_{D^-} dx dy = \int_0^1 \left(x^2 - 0\right) dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

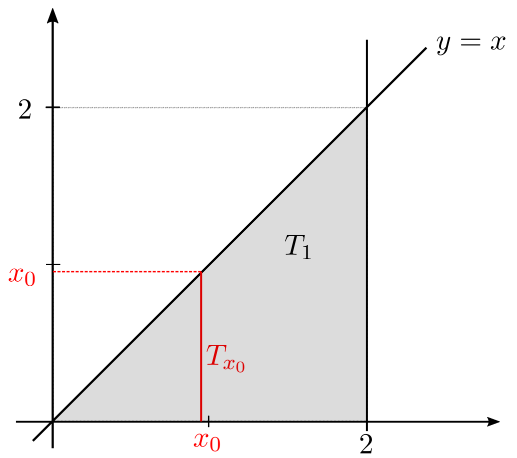
et donc $\mathcal{A}(D^+) = \mathcal{A}(C) - \mathcal{A}(D) - \mathcal{A}(D^-) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

$\boxed{\text{Les graphes des fonctions } x \mapsto \sqrt{x} \text{ et } x \mapsto x^2 \text{ divisent bien } C \text{ en trois parties d'aire égales (à } \tfrac{1}{3}\text{).}}$

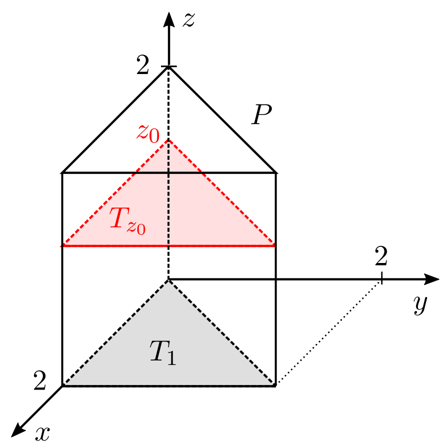
Remarque. On aurait aussi pu montrer que D est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ (exercice). Ceci donne immédiatement que $\mathcal{A}(D^+) = \mathcal{A}(D^-)$ et permet de conclure.

Exercice 4.

1.



5.



2. On calcule I_1 en utilisant le Théorème de Fubini en tranches verticales (une telle tranche est dessinée en rouge sur la figure) :

$$I_1 = \iint_{T_1} xy\, dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^x xy\, dy\right) dx = \int_0^2 x \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = \boxed{2}.$$

3. La dilatation φ est un changement de variable admissible qui donne :

$$I_2 = \iint_{T_2} xy\, dx dy = \iint_{\varphi(T_1)} xy\, dx dy = \iint_{T_1} (\sqrt{3} \cdot x')\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y'\right) J_{\varphi(x',y')}\, dx' dy' = \iint_{T_1} x'y'\, dx' dy'$$

car $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$ et $J_{\varphi(x',y')} = \left|\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right| = 1$. On en conclut que $\boxed{I_2 = I_1}$.

4. Avec le même changement de variable :

$$J_2 = \iint_{T_2} x^2\, dxdy = \iint_{\varphi(T_1)} x^2\, dxdy = \iint_{T_1} (\sqrt{3}\cdot x')^2\, \overbrace{J_{\varphi(x',y')}}^{=1}\, dx'dy' = \iint_{T_1} 3\, x'^2\, dx'dy' = 3\, J_1$$

par linéarité de l'intégrale double. Ceci donne une constante $\boxed{C = \frac{1}{3}}$ telle que $J_1 = C \cdot J_2$.

6. Pour calculer l'intégrale demandée, on utilise le théorème de Fubini (3D) en tranches horizontales (une telle tranche est dessinée en rouge sur la figure) :

$$\iiint_P xyz\, dxdydz = \int_0^2 z \cdot \Big(\iint_{T_z} xy\, dxdy \Big)\, dz = \int_0^2 z \cdot \Big(\iint_{T_1} xy\, dxdy \Big)\, dz = 2 \cdot \int_0^2 z\, dz$$

car $\iint_{T_z} xy\, dxdy$ ne dépend pas de z et vaut $\iint_{T_1} xy\, dxdy = 2$ quand $z = 0$, par la question **2.** ci-dessus.

On en déduit que $\displaystyle\iiint_P xyz\, dxdydz = 2 \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \boxed{4}$.