Feuille d'exercices n°7
Problèmes de modélisation

Exercice 1 - *Un problème à méditer dans son bain !*

Un joaillier de Syracuse utilisait pour confectionner ses bijoux un alliage d'or et d'argent ; métaux de densités respectives 20 et 10 grammes par cm^3.

Le roi Hiéron II lui commanda une couronne de 5 kg, en exigeant que l'or en constitue au moins 90% de sa masse. Le joaillier lui procura une très belle pièce, mais Archimède, l'ami du roi, doutait de sa pureté. Alors qu'il prenait son bain, il eut une idée pour vérifier la composition de la couronne. En la plongeant dans l'eau, il constata que son volume était de 370 cm^3.

1. Que s'est alors écrié Archimède ?

2. Déterminer la matrice A qui, étant donné un bijou fabriqué par ce joaillier, associe au vecteur $X = \begin{pmatrix} \text{masse d'or} \\ \text{masse d'argent} \end{pmatrix}$ le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{pmatrix}$.

3. En déduire un calcul de la composition de la couronne.

4. Le joaillier a-t-il intérêt à faire ses bagages rapidement ?

Exercice 2 - *Exercice de modélisation (Annales 2014).*

Chaque année, une société de pêche lâche 100 jeunes poissons dans un lac. D'une année à l'autre :

— 80% des jeunes poissons (J) meurent, et 20% deviennent adultes ;

— un poisson adulte (A) se reproduit en donnant naissance en moyenne à 2 jeunes poissons, puis 50% des poissons adultes meurent ou sont péchés.

1. L'année n, on note $X(n) = (J(n), A(n))$ la population de poissons. Montrer que, écrit en colonne, $X(n)$ satisfait une relation de recurrence du type $X(n+1) = MX(n) + E$ avec M une matrice fixe et E un vecteur fixe.

2. Montrer qu'il existe une population stationnaire et la calculer.

Exercice 3 - *Chaîne de Markov à deux états.*

On considère l'évolution d'un système à deux états : A et B. Soient p et q deux réels donnés dans $[0, 1]$. D'un instant t à l'instant $t + 1$, la probabilité de passer de A à B est p, et celle de passer de B à A est q.

1. Donner le graphe de la chaîne de Markov associée (en précisant les probabilités des transitions qui ne sont pas données dans l'énoncé). Montrer que la matrice de transition M associée (dans la convention du cours) est

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$$

2. Calculer $M - I_2$. En déduire que si p ou q est non nul, alors il existe un unique vecteur état stationnaire $E_1 = (x, y)$ et le calculer. (On rappelle que l'on veut $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y = 1$ pour interpréter E_1 comme une répartition probabiliste du système entre les deux états A et B.)

3. Soit $E_2 = (1, -1)$. Calculer ME_2. En déduire que dans la base $B' = (E_1, E_2)$ la matrice de l'application associée à M est donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}.$$

4. Calculer $(M')^n$. En déduire que si p et $q \in]0, 1[$, alors quelle que soit la condition initiale X_0, la suite de vecteurs $X(n) = (M')^n X_0$ converge vers un multiple de E_1. Quel résultat du cours a-t-on montré (dans un cas particulier) ? Que se passe-t-il pour $p = q = 1$?