Feuille d'exercices n°2

Intégrales doubles et triples

Exercice 1 - *Quelques intégrales doubles.*

Dessiner les domaines d'intégration et calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \iint_D (1-x-y)\,dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x+y \leq 1\}$,

2. $I_2 = \iint_D \frac{xy^2}{1+x^2}\,dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$,

3. $I_3 = \iint_D e^{y-x}\,dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y-x \leq 1\,,\ x \leq 0\,,\ y \geq 0\}$,

4. $I_4 = \iint_D \frac{2x}{1+x^2+y}\,dxdy$ pour $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 2 - *Symétries dans une intégrale.*

Soit $f : R_a \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le carré $R_a = [-a,a] \times [-a,a] \subset \mathbb{R}^2$.

1. Montrer à l'aide de Fubini que

$$\iint_{R_a} f(x,-y)\,dxdy = \iint_{R_a} f(x,y)\,dxdy\,.$$

Montrer de même que

$$\iint_{R_a} f(-x,y)\,dxdy = \iint_{R_a} f(x,y)\,dxdy \text{ et } \iint_{R_a} f(-x,-y)\,dxdy = \iint_{R_a} f(x,y)\,dxdy.$$

2. Montrer que $\iint_{R_a} f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_a} f(y,x)\,dxdy$.

Indication. La symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, $(x,y) \mapsto (y,x)$, est une isométrie.

3. *Illustration.* Calculer

$$\iint_{R_{2020}} x^{20}y^{20}\sin(x^{20}y^{21})\,dxdy \quad \text{et} \quad \iint_{R_{2020}} (x-y)^{2021}e^{xy}\,dxdy\,.$$

4. *Illustration (bis).* Montrer sans calcul que l'abscisse du centre de gravité du domaine D_3 de l'**Exercice 6** (de la feuille 1) est nul.

Indication. On fera attention au fait que D_3 n'est pas un rectangle.

Exercice 3 - *Translations, homothéties.*

On considère le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$.

1. Représenter D et montrer que D est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

2. Calculer les intégrales $I = \iint_D x\,dxdy$ et $J = \iint_D y\,dxdy$.

Indication. On pourra utiliser l'**Exercice 2** pour se faciliter la vie.

3. En déduire les coordonnées (x_G, y_G) du centre de gravité du domaine D supposé homogène.

Pour a, b et r paramètres réels données, on considère maintenant le domaine

$$D_{a,b,r} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq a, (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}\,.$$

4. Déterminer, en s'aidant d'une translation et d'une homothétie, les intégrales

$$I_{a,b,r} = \iint_{D_{a,b,r}} x\,dxdy \quad \text{et} \quad J = \iint_{D_{a,b,r}} y\,dxdy\,.$$

Exercice 4 - *Domaines en coordonnées polaires.*

Représenter chacun des domaines $D_i \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ suivants ; pour chacun d'eux donner un domaine $\Delta_i \subset \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$ tel que l'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ réalise une bijection de $\Delta_i \setminus \{r=0\}$ sur $D_i \setminus \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\,,\ y \geq 0\}\,,\\
D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ x+y \geq 0\}\,,\\
D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{2} \leq x^2+y^2 \leq 2\,,\ y \leq \sqrt{3}x\,,\ x \leq \sqrt{3}y\},\\
D_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq y \leq x \leq 1\}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 5 - *Calculs d'intégrales en coordonnées polaires.*

1. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq R^2\}$.

2. Calculer l'aire des domaines D_i de l'**Exercice 4**.

3. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\,,\ 0 \leq x\,,\ y \leq x\}$.

Exercice 6 - *Dilatations et centre de gravité.*

Soit φ la dilatation de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : (x',y') \mapsto (x = ax', y = by')$ avec $a, b > 0$.

1. Montrer que $\psi = \varphi^{-1}$ est une dilatation de $\mathbb{R}^2$.

2. Rappeler les jacobiens respectifs de φ et de ψ.

On suppose que la restriction de ψ au domaine régulier Δ induit une bijection $\psi : \Delta \to D$ où D est un domaine régulier.

3. Montrer que les centres de gravité de Δ et de D se correspondent par ψ.

Soit D le disque (plein) de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ et $\mathcal{E}_{a,b}$ l'ellipse (pleine) $\mathcal{E}_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$. *On suppose ces domaines homogènes.*

4. Montrer que φ induit une bijection entre D et $\mathcal{E}_{a,b}$.

5. En utilisant la question **3.** ci-dessus, déterminer les coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{E}_{a,b}$.

6. Calculer l'abscisse du centre de gravité de $D^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$ en passant aux coordonnées polaires.

7. En considérant la symétrie $(x,y) \mapsto (y,x)$, déterminer l'ordonnée de son centre de gravité.

8. En utilisant **3.**, déterminer les coordonnées du centre de gravité de $\mathcal{E}^+_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ y \geq 0\}$.

Exercice 7 - *Intégrales triples et pyramide.*

1. Représenter le domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ x+y+z \leq 1\}$.

2. En découpant en tranches horizontales, calculer le volume de D.

Indication. Calculer l'aire d'une tranche horizontale, à l'aide d'une homothétie (ou de Thalès).

3. Esquisser une preuve de la généralisation au volume d'une pyramide P (possiblement penchée), de hauteur h et de base un domaine régulier de $\mathbb{R}^2$ d'aire A.

On suppose D homogène et on appelle G son centre de gravité.

4. Calculer l'intégrale $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz$; en déduire que la hauteur de G est $\frac{1}{4}$.

5. Esquisser une preuve du fait que la hauteur du centre de gravité de la pyramide générale P de la question **3.**, supposée homogène, est $\frac{h}{4}$.

6. On admet que l'application $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(x,y,z) = (z,y,x)$ est une symétrie. Montrer que D est invariant par ψ et en déduire $\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz$.

7. Donner les coordonnées du centre de gravité de D, supposé homogène.

8. Soit φ la dilatation de $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$. Déterminer et représenter l'image de D par φ et donner (sans calculs) les coordonnées de son centre de gravité.

Indication. On pourra s'inspirer de l'**Exercice 6**.

Exercice 8 - *Une intégrale triple sur le cube.*

Pour $\theta \in \mathbb{R}^+$, on note par $\mathcal{C}_\theta$ le cube $[0,\theta] \times [0,\theta] \times [0,\theta]$.

1. Calculer $\displaystyle I(\theta) = \iiint_{\mathcal{C}_\theta} \sin(x+y+z)\,dxdydz$ en fonction de θ.

2. Quel est le signe de $I(1)$?

Exercice 9 - *Coordonnées cylindriques.*

1. Représenter $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq z \leq 1\,,\ x^2+y^2 \leq 1+z^2\}$ et calculer son volume en utilisant le théorème de Fubini en tranches horizontales.

2. Calculer le même volume en coordonnées cylindriques.

3. Déterminer le centre de gravité de sa moitié supérieure, $D^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1\,,\ x^2 + y^2 \leq 1+z^2\}$, supposée homogène.

Indication. On pensera aux axes de symétries pour déterminer x_G et y_G.

4. Calculer le moment d'inertie de D en rotation autour de l'axe Oz : $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2)\,dxdydz$.

Exercice 10 - *Coordonnées sphériques.*

Calculer l'intégrale de f sur le domaine D avec

1. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ et $f(x,y,z) = xyz$,

2. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ et $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^\alpha$, pour $\alpha = 1$ et -1.

Exercices bonus

Exercice 11 - *Centres de gravité.*

Calculer le centre de gravité des domaines D suivants, supposés homogènes :

1. $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\,,\ x \geq 0\,,\ |y| \geq ax\}$ où a est un réel strictement positif.

2. $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\,,\ (x-1)^2+y^2 \geq 1\}$.

Indication. (cf. cours – utiliser la propriété de barycentre du centre de gravité !)

Exercice 12 - *Coordonnées polaires (difficile !!)*

1. Dessiner le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+y^2-2x \geq 0\}$.

Indication. On remarquera que $x^2+y^2-2x = (x-1)^2+y^2-1$.

2. Déterminer un domaine « polaire » Δ correspondant à D (au sens de l'**Exercice 4**).

Indication. On se rappellera que si l'un des côtés d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, ce triangle est rectangle. (Ainsi que sa trigonométrie du triangle rectangle...)

3. Calculer $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ en coordonnées polaires.

Indication. On utilisera une intégration par parties pour « remplacer » arccos par sa dérivée sous l'intégrale, *puis* le changement de variable $u = r^2$ pour calculer cette dernière.