PeiP A1/C — POLYTECH PARIS-SACLAY
MATHÉMATIQUES 2 — 2020–2021

# Feuille d'exercices n°1

## INTÉGRALES SIMPLES (RAPPELS) ET DOUBLES (INTRODUCTION)

**Exercice 1 -** *Échauffement.*

**1.** Soient $f$ et $g$ des fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer les dérivées de $f+g$, $f\cdot g$, $f\circ g$.

**2.** Rappeler les domaines de définition, les images, puis dériver les fonctions cos, sin, tan, ln, exp.

**3.** Même question avec les fonctions arccos, arcsin, arctan.

**Exercice 2 -** *Intégrales simples : révisions de méthodes de calculs.*

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la méthode suggérée.

**1.** $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx$, à l'aide d'une intégration par parties.

**2.** $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$, à l'aide du changement de variables $x=\ln(u)$.

**3.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$, à l'aide du changement de variable $u(x)=\cos x$.

**4.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx$, à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

**Exercice 3 -** *Détermination de primitives.*

**1.** Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de chacune des fonctions

$$f : x\mapsto \frac{1}{x-7}\,,\quad g : x\mapsto \cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right),\quad h_a : x\mapsto \ln(x-a)\ (\text{pour } a\in\mathbb{R} \text{ et } x>a).$$

**2.** Dériver la fonction $x\mapsto \ln(\cos x)$. En déduire (toutes) les primitives de la fonction tangente.

**3.** Déterminer (toutes) les primitives des fonctions :

$$f : x\mapsto xe^x\,,\quad g : x\mapsto \ln(1+x^2)\,,\quad h_\alpha : x\mapsto x^\alpha\ (\text{pour } x>0,\ \text{avec } \alpha\in\mathbb{R}).$$

**Exercice 4 -** *Intégrale et aire sous la courbe représentative.*

**1.** Soient $a$ et $b$ des réels positifs. Calculer puis interpréter géométriquement les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^a bx\,dx \quad \text{et} \quad J=\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,.$$

**2.** Soient $f,g : [a,b]\to\mathbb{R}$, des fonctions continues telles que $f\le g$. Interpréter géométriquement l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,dx$.

*Indication.* On pourra commencer par considérer les cas $0\le f\le g$ et $f\le 0\le g$.

**Exercice 5 -** *Relation entre intégrale et primitive.*

Soit $f, \varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose de plus $\varphi$ et $\psi$ de classe $C^1$. On note par $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)\,dy$ pour tout réel $x$.

**1.** Soit $F$ une primitive quelconque fixée de $f$. Montrer que $g(x) = F \circ \psi(x) - F \circ \varphi(x)$.

**2.** En déduire que $g$ est $C^1$ et donner l'expression de sa dérivée $g'$, en fonction de $f$, $\varphi$ et $\psi$.

**Exercice 6 -** *Dessins de domaines du plan.*

Représenter les domaines suivants du plan :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq x+1,\ 0 \leq y,\ y+2x \leq 4\}\,,\\
D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq -2,\ -1 \leq y \leq 1,\ y \geq x-3\}\,,\\
D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1,\ y \leq x^2+1,\ y \geq 2x,\ y \geq -2x\}\,,\\
D_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y \leq \sqrt{3}\,x,\ x \leq \sqrt{3}\,y\}\,.
\end{aligned}$$

**Exercice 7 -** *Découpages en tranches et calculs d'aires.*

Pour chaque domaine $D$ de l'exercice précédent :

**1.** déterminer géométriquement les tranches verticales $D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = a\}$ (vide ou pas ? extrémités ? etc.), pour toutes les valeurs du paramètre réel $a$.

**2.** Déterminez de même les tranches horizontales $D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = b\}$ pour tout $b \in \mathbb{R}$.

**3.** Pour $i = 1$, 2 et 3, donner les deux expressions de l'aire de $D_i$, par décomposition en tranches horizontales *et* verticales. Puis calculer l'aire en choisissant l'une de ces expressions.

**Exercice 8 -** *Premiers calculs d'intégrales doubles.*

Soit $C = [0,\pi] \times [0,\pi]$. On dénote par $T_-$ (resp. $T_+$) la partie de $C$ consistant en les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y \leq \pi$ (resp. $x + y \geq \pi$.)

**1.** Représenter $C$, $T_-$ et $T_+$, puis déterminer géométriquement leurs aires respectives.

**2.** Calculer l'intégrale double de la fonction $(x,y) \mapsto xy$ sur $T_-$ grâce à Fubini, en tranches verticales.

**3.** Calculer l'intégrale double de cette même fonction sur $T_+$ grâce à Fubini en tranches horizontales.

**4.** Vérifier vos résultats en les comparant à l'intégrale double sur $C$.

**Exercice 9 -** *Et quelques autres.*

**1.** Calculer les intégrales doubles $\displaystyle\iint_{D_i} x\,dxdy$ pour les domaines $D_i$ de l'exercice 5 pour $i = 1$, 2, 3.

**2.** Donner les abscisses des centres de gravité des domaines précédents, supposés *homogènes* (c'est-à-dire de densité constante).

**3.** Donner les ordonnées de ces centres de gravité.

**Exercice 10 -** *Estimation d'intégrales doubles.*

Sans chercher à calculer explicitement les intégrales doubles ci-dessous, montrer que

**1.** $\displaystyle\iint_C \cos^2(x+y)\,dxdy = \pi^2 - \iint_C \sin^2(x+y)\,dxdy$, où $C$ est le carré $[0,\pi] \times [0,\pi]$.

**2.** $\displaystyle\iint_{C_{a,b}} e^{x^2+y^2}\,dxdy \geq ab$, où $C_{a,b}$ est le rectangle $[0,a] \times [0,b]$ (avec $a$ et $b > 0$).

**3.** $\displaystyle\left|\iint_D \arctan(x^{2019} + y^{2020})\,dxdy\right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \text{Aire}(D)$, pour tout domaine régulier $D$.