Correction du contrôle 4

Exercice 1.

1. La matrice étant déjà triangulaire (ou le système échelonné), on remarque qu'elle admet trois pivots si et seulement si $c \neq 0$, et deux sinon. L'image de f est donc de dimension 2 si $c = 0$ et de dimension 3 sinon.
2. D'après le théorème du rang dans le cas de notre fonction $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donne
$$\dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^4),$$
ou encore $\dim(\ker(f)) = 4 - \dim(\mathrm{im}(f))$. On en déduit que le noyau de f est de dimension 2 si $c = 0$ et 1 sinon.
3. Comme le noyau de f est de dimension au moins 1, f n'est jamais injective. (On rappelle que pour qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ soit injective, il faut que $n \leq p$.)
De plus, f est surjective si et seulement si $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, f est donc surjective si et seulement si $c \neq 0$.
4. Pour que le vecteur $\overrightarrow{v} = (3, 2, 1, 0)$ engendre le noyau de f, il faut qu'il y appartienne, i.e. que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$. Or
$$AV = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2a \\ 2+b \\ 0 \end{pmatrix}$$
qui est nul si et seulement si $a = -\frac{5}{2}$ et $b = -2$.
Finalement, pour que le noyau de f soit de dimension 1, il faut (et il suffit) que $c \neq 0$, on peut par exemple choisir $c = 1$.

Exercice 2.

1. Appliquons l'algorithme de Gauss–Jordan pour échelonner la matrice $A = \left(U_1 \,\middle|\, U_2 \,\middle|\, U_3 \right)$ où U_i est le vecteur $\overrightarrow{u_i}$, placé en colonne.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
La matrice obtenue a deux pivots situés sur les deux premières colonnes, donc $\dim(E) = 2$ et $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ en est une base.
2. On peut écrire le système définissant F_a comme : $\begin{cases} x + 0 + z + y = 0 \\ 0 + t + 0 - ay = 0 \end{cases}$
On peut donc choisir x et t comme variables principales, z et y comme variables secondaires. Ainsi $\dim(F) = 2$ (le nombre de variables secondaires). De plus une base de F est obtenue en cherchant les solutions du système correspondant à $y = 1$, $z = 0$ et $y = 0$, $z = 1$, soit les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 0, a)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-1, 0, 1, 0)$.
3. Pour vérifier que E et F_3 sont supplémentaires il suffit de vérifier deux choses
(a) $\dim(E) + \dim(F_3) = \dim(\mathbb{R}^4)$; (b) $E \cap F_3 = \{0\}$.
Le point (a) est vérifié d'après les questions 1 et 2, puisque $2 + 2 = 4$.
Pour (b), on peut chercher quels vecteurs de $\mathbb{R}^4$ sont dans l'intersection. Tout vecteur de E s'écrit $\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}$ avec α et β réels, il sera donc dans F_3 si ses coordonnées
$$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = 3\alpha + 3\beta \\ t = \alpha \end{cases} \quad \text{satisfont} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ t - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \begin{cases} (\alpha - \beta) + 2\alpha + (-3\alpha + 3\beta) = 2\beta = 0 \\ 4\alpha - 6\alpha = -2\alpha = 0 \end{cases}$$
ce qui implique $\alpha = \beta = 0$ et prouve (b).

Remarque. Au lieu de (a) et (b), on peut aussi vérifier que concaténer une base de E avec une base de F_3 donne une base de $\mathbb{R}^4$. On forme donc la famille constituée des bases déterminées aux questions 1 et 2 : elle est constituée de $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ vecteurs, il suffit donc de prouver qu'elle est libre. C'est le cas puisqu'échelonner la matrice correspondante conduit à 4 pivots :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Pour déterminer $E \cap F_2$, on procède comme à la question 3 ci-dessus. Dans le cas où $a = 2$, le système à résoudre devient $\begin{cases} (\alpha - \beta) + 2\alpha + (-3\alpha + 3\beta) = 2\beta = 0 \\ 4\alpha - 4\alpha = 0 \end{cases}$

   Donc β doit être nul et α quelconque, ce qui montre que $E \cap F_2 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1})$.

   Remarque. On pouvait aussi remarquer directement que $\overrightarrow{u_1} \in F_2$ mais que $\overrightarrow{u_2} \notin F_2$. L'intersection est donc de dimension au moins 1 mais inférieure à 2. C'est donc la droite endengrée par $\overrightarrow{u_1}$.

Exercice 3.

1. On forme la matrice $A = \left(U_1 \,\middle|\, U_2 \,\middle|\, U_3 \right)$ où U_i est le vecteur $\overrightarrow{u_i}$, placé en colonne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   La matrice obtenue admet 3 pivots, donc $\mathcal{B}$ est une famille libre. Comme elle est constituée de 3 vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La matrice de passage de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont données par les vecteurs de $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{B}_3$, c'est-à-dire la matrice $A = P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}}$ ci-dessus.

   De plus $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_3} = (P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}})^{-1}$, donc il suffit d'inverser $P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}}$. Pour cela, appliquons l'algorithme de Gauss–Jordan à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

   Ainsi $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont données, à partir des coordonnées dans $\mathcal{B}_3$ par la formule :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ x - 2y + 3z \\ -x + y - z \end{pmatrix}$$

4. Le plan P est constitué des vecteurs dont la composante sur $\overrightarrow{u_2}$ est nulle. Il est donc défini par l'équation cartésienne $y' = 0$ dans cette base. De par la question précédente, on en déduit que $x - 2y + 3z = 0$ est une équation cartésienne de P dans $\mathcal{B}_3$.

Exercice 4.

1. On calcule le produit $M \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix}$.

2. De même, $M \cdot (M \cdot M) = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. L'équation $M^2X = 0$ où $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ est équivalente au système $\begin{cases} 6x + 18y - 18z = 0 \\ 6x + 18y - 18z = 0 \end{cases}$ et donc à la simple équation $x + 3y - 3z = 0$. On peut choisir y et z comme variables secondaires, ainsi $\ker(f^2)$ est de dimension 2 et une base est donnée par $\big((-3, 1, 0), (3, 0, 1)\big)$.

   Remarque. On pouvait aussi immédiatement remarquer que ces deux vecteurs non-colinéaires étaient dans le noyau de M^2. On pouvait alors conclure en notant que le rang de M^2 est 1 et donc, par le théorème du rang, la dimension de son noyau est 2.

4. On remarque que la première colonne de M^2 est non nulle, d'où $(f \circ f)(\vec{e}_1) \neq \vec{0}$ en notant $\vec{e}_1$ le premier vecteur de la base canonique.

5. On échelonne la matrice formée des colonnes $\big(\, \vec{e}_1 \,\big|\, f(\vec{e}_1) \,\big|\, (f \circ f)(\vec{e}_1) \,\big)$, et on vérifie que la matrice équivalente obtenue admet bien trois pivots :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Remarque. C'est en fait une propriété générale des matrices nilpotentes. En effet, dans notre cas on veut montrer qu'une famille de 3 vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. On considère donc une combinaison linéaire quelconque nulle $\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta f(\overrightarrow{e_1}) + \gamma f \circ f(\overrightarrow{e_1}) = 0$ et on montre que nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
   Pour cela, on applique $f \circ f$: par linéarité, et sachant que $f \circ f \circ f = 0$,

$$f \circ f\big(\alpha\overrightarrow{e_1} + \beta f(\overrightarrow{e_1}) + \gamma f \circ f(\overrightarrow{e_1})\big) = \alpha f \circ f(\overrightarrow{e_1}) + \beta f \circ f \circ f(\overrightarrow{e_1}) + \gamma f \circ f \circ f \circ f(\overrightarrow{e_1}) = \alpha f \circ f(\overrightarrow{e_1})$$

   doit être égal à $f \circ f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ et donc $\alpha = 0$ puisque $f \circ f(\overrightarrow{e_1}) \neq \overrightarrow{0}$. Ensuite on applique f qui donne (pour les mêmes raisons) que $\beta = 0$, ce qui implique finalement $\alpha = 0$.

6. En notant $\mathcal{B}$ la famille $\big(\overrightarrow{e_1}, f(\overrightarrow{e_1}), (f \circ f)(\overrightarrow{e_1})\big)$, on a

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) & = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot f(\vec{e}_1) + 0 \cdot (f \circ f)(\vec{e}_1) & = (0, 1, 0)_{\mathcal{B}} \\ f(f(\vec{e}_1)) & = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot f(\vec{e}_1) + 1 \cdot (f \circ f)(\vec{e}_1) & = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} \\ f((f \circ f)(\vec{e}_1)) & = \vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot f(\vec{e}_1) + 0 \cdot (f \circ f)(\vec{e}_1) & = (0, 0, 0)_{\mathcal{B}} \end{cases}$$

   Ainsi la matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.