Contrôle 1

DURÉE : 1H30 – DATE : 18/02/2021

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Ce devoir comporte 1 page et est constitué de 5 exercices indépendants.

Toute réponse doit être *justifiée*. Le barème donné est *indicatif*.
Le soin apporté à la rédaction et aux dessins sera pris en compte.

Exercice 1. (3 points) Calculer l'intégrale double suivante :

$$I = \iint_{[0,2]\times[0,1]} \frac{4x^2}{(1+x^3)(y^2-4)}\, dxdy\,.$$

Exercice 2. (7,5 points)

On considère le domaine $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ -x \leq y \leq x\}$.

1. (a) Représenter D_1.
   (b) Calculer l'aire de D_1 grâce à un changement de variables vers les coordonnées polaires.
2. Calculer l'intégrale double $I = \displaystyle\iint_{D_1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy\,.$

Soit D_2 le domaine $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ -x \leq \sqrt{3}\,y \leq x\}$.

3. Déterminer une dilatation ψ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\psi(D_1) = D_2$ et en donner le jacobien.
4. En déduire l'aire de D_2.

Exercice 3. (2,5 points)

Représenter le domaine $D' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 3\,,\ y-x \leq 2\,,\ x \leq 0\,,\ y \geq 0\}$ et calculer son volume.

Exercice 4. (6 points) Centre de gravité d'un cerf-volant.

On considère le domaine D de $\mathbb{R}^2$, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy), tel que

$$D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1,\ x+4y \geq 1,\ x \geq 0\}\,.$$

On suppose D non homogène, de densité $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\rho(x,y) = 1-x^2$.

1. Représenter D.
2. Calculer $I = \displaystyle\iint_D x(1-x^2)\, dxdy$ en s'aidant de la symétrie de D.
3. Monter que $M = \displaystyle\iint_D (1-x^2)\, dxdy = \frac{5}{8}$. (*Indication.* On pourra s'aider de la même symétrie.)
4. Monter que $J = \displaystyle\iint_D y(1-x^2)\, dxdy = \frac{9}{32}$. (*Indication.* Idem...)
5. Donner les coordonnées du centre de gravité de D.

Exercice 5. (3 points)

Sans calculer explicitement l'intégrale double suivante, montrer que

$$\left| \iint_{[0,2]\times[0,2]} \left(\frac{1}{\pi} \arctan\left(x^{12}y^3\right) + \frac{\sqrt{x+y}}{2} \right) dxdy \right| \leq 6\,.$$