Correction contrôle n°1

DURÉE : 1H30 – DATE : 18/02/2021

Exercice 1.

La fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{4x^2}{(1+x^3)(y^2-4)}$ est continue et séparable sur $[0\,,2]\times[0\,,1]$ qui est un rectangle de $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Fubini dans ce cas particulier,

$$I = \iint_{[0,2]\times[0,1]} \frac{4x^2}{(1+x^3)(y^2-4)}\,dxdy = \underbrace{\left(\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}\,dx\right)}_{J} \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{4}{y^2-4}\,dy\right)}_{K}.$$

Pour calculer J, on remarque que l'intégrande est la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{3}\ln\big(1+x^3\big)$:

$$J = \int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln\big(1+x^3\big)\right]_0^2 = \frac{1}{3}\Big(\ln(9)-\ln(1)\Big) = \frac{2}{3}\ln(3).$$

Pour calculer K, on réalise une décomposition en éléments simples sous la forme

$$\frac{4}{y^2-4} = \frac{4}{(y-2)(y+2)} = \frac{a}{(y-2)} + \frac{b}{(y+2)}$$

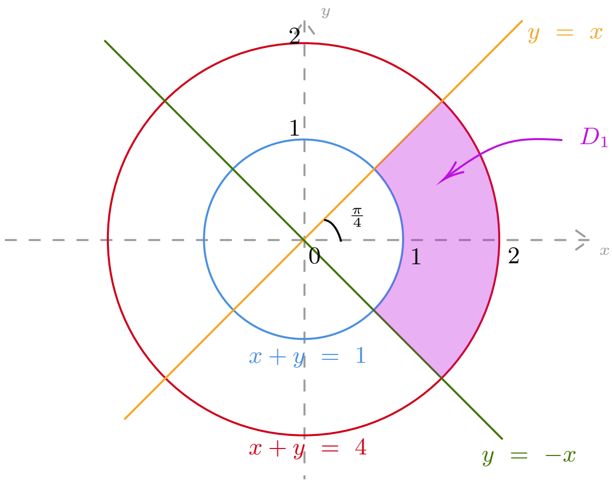
où a et b sont des réels. En multipliant par $y-2$ puis en évaluant en $y=2$, on obtient $\frac{4}{4} = a+0$ d'où $a=1$. De même, en multipliant par $y+2$ puis en évaluant en $y=-2$ on trouve $b=-1$. On a donc

$$K = \int_0^1 \frac{4}{y^2-4}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y+2}\,dy = \int_0^1 \frac{1}{y-2}\,dy - \int_0^1 \frac{1}{y+2}\,dy.$$

Il suffit maintenant d'intégrer chacun des deux termes :

$$K = \Big[\ln\Big(|y-2|\Big)\Big]_0^1 - \Big[\ln\Big(|y+2|\Big)\Big]_0^1 = \Big(\ln(1)-\ln(2)\Big) - \Big(\ln(3)-\ln(2)\Big) = -\ln(3).$$

Finalement, $I = JK = \boxed{-\frac{2}{3}\ln(3)^2}$.



Exercice 2.

1. (a) Pour représenter D_1, on trace les cercles centrés en $(0\,,0)$ et de rayons 1 et 2, ainsi que les droites $x=0$, $y=x$ et $y=-x$. Le sens des inégalités nous permet de déterminer D_1.

   (b) Les droites $y = \pm\, x$ induisent un angle $\theta = \pm\,\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des abcisses.

   Les éléments de D_1 ont un rayon r compris entre 1 et 2. Posons donc $\Delta_1 = [1\,,2]\times\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ et $\varphi : \mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r\,,\theta)\mapsto(r\cos\theta\,,r\sin\theta)$. φ induit une bijection de Δ_1 vers D_1. Elle est dérivable, sa dérivée est continue et il en est de même pour son inverse. En utilisant le changement de variables $(x\,,y) = (r\cos\theta\,,r\sin\theta)$, l'aire de D_1 peut s'écrire

   $$\mathcal{A}(D_1) = \iint_{D_1} dxdy = \iint_{\Delta_1} r\,drd\theta.$$

   D'après le théorème de Fubini pour fonctions séparables sur un rectangle,

   $$\mathcal{A}(D_1) = \int_1^2 r\,dr \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \cdot \Big[\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \left(\frac{4-1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{3\pi}{4}}.$$

2. Pour calculer I on utilise le même changement de variables que précédemment.
$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D_1} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = \iint_{\Delta_1} \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2}}\, r\, drd\theta \\
&= \int_1^2 r\, dr \cdot \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta \qquad \text{(théorème de Fubini pour fonctions séparables)} \\
&= \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \cdot \Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \left(\frac{4-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}.
\end{aligned}$$

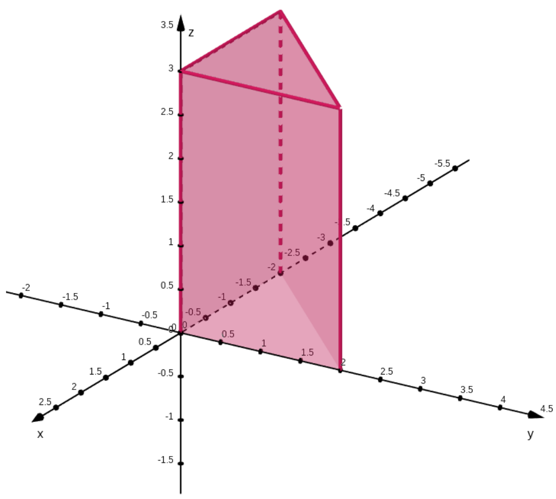
3. Soit ψ la dilatation de $\mathbb{R}^2$: $(x\,,y) \mapsto (ax\,,by)$ avec a et b deux réels non nuls. La fonction ψ est une bijection et son inverse est la dilatation $\psi^{-1} : (x\,,y) \mapsto \left(\frac{x}{a}\,,\frac{y}{b}\right)$.
$$\begin{aligned}
\psi(D_1) &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \psi^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{a}\,,\frac{y}{b}\right) \in D_1\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \le \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 4,\ \frac{x}{a} \ge 0,\ -\frac{x}{a} \le \frac{y}{b} \le \frac{x}{a}\right\} \\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \le \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 4,\ x \ge 0,\ -x \le \frac{ay}{b} \le x\right\} \text{ en prenant } a > 0.
\end{aligned}$$
Dans la dernière étape, on passe de $\frac{x}{a} \ge 0$ à $x \ge 0$ et on suppose donc $a > 0$ (cela préserve alors le sens de toutes les inégalités). Pour que
$$\psi(D_1) = D_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \le \frac{x^2}{3} + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ -x \le \sqrt{3}\,y \le x\right\}$$
on en déduit par identification que $a^2 = 3$, $b^2 = 1$ et $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$. Ainsi $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$ conviennent.

On en déduit donc que $\boxed{\psi : (x\,,y) \mapsto (\sqrt{3}\,x\,,y)}$ dont le jacobien est $\boxed{\mathrm{Jac}(\psi) = \sqrt{3}}$.

4. Les bijections ψ et ψ^{-1} sont dérivables et leurs dérivées sont continues. On utilise le changement de variables induit par ψ.
$$\mathcal{A}(D_2) = \iint_{D_2} dxdy = \iint_{\psi^{-1}(D_2)} \mathrm{Jac}(\psi)\, dx'dy' = \iint_{D_1} \sqrt{3}\, dx'dy' = \sqrt{3}\,\mathcal{A}(D_1) = \boxed{\frac{3\pi\sqrt{3}}{4}}.$$

Exercice 3.

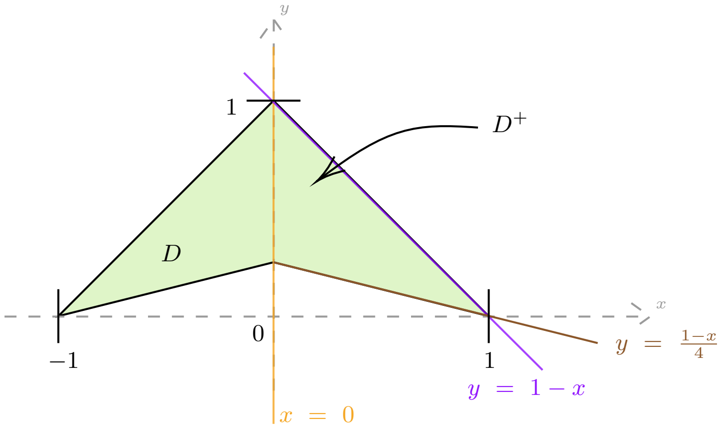
On peut écrire D' en tranches horizontales :
$$D' = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le z \le 3\,,\ (x,y)\in D_z\}$$
avec $D_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\ y - x \le 2\,,\ x \le 0\,,\ y \ge 0\}$ pour tout z de $[0\,,3]$.



D' est donc le prisme à base triangulaire représenté ci-contre. Son volume s'écrit :
$$\mathcal{V}(D') = \iiint_{D'} dxdydz = \int_0^3 \mathcal{A}(D_z)\, dz\,.$$
On calcule l'aire des tranches D_z en découpant en tranches verticales :
$$\mathcal{A}(D_z) = \int_{-2}^0 \left(\int_0^{2+x} dy\right) dx = \int_{-2}^0 (2+x)\, dx = \left[2x + \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0 = 2\,.$$
Finalement, le volume de D' est :
$$\mathcal{V}(D') = \int_0^3 2\, dz = \boxed{6}.$$

Exercice 4.

1. Le domaine D est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées avec comme partie « droite » :
$$D^+ = D \cap \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\right) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\ x+y \leq 1,\ x+4y \geq 1\}.$$
On trace D^+ comme le domaine compris entre les droites $x=0$, $y=1-x$ et $y=\dfrac{1-x}{4}$. On complète ensuite D^+ en lui adjoignant son symétrique par rapport à la droite d'équation $x=0$.



2. Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (-x,y)$ la symétrie de $\mathbb{R}^2$ par rapport à l'axe des ordonnées. $\varphi(D) = D$ et $\mathrm{Jac}(\varphi) = 1$. On calcule I en utilisant le changement de variables induit par φ :
$$I = \iint_D x(1-x^2)\,dxdy = \iint_D (-x)(1-(-x)^2)\,dxdy = -\iint_D x(1-x^2)\,dxdy = -I$$
d'où $\boxed{I=0}$.

3. Soit $D^- = D \cap (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R})$. On a $\varphi(D^+) = D^-$, $D^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1,\ \dfrac{1-x}{4} \leq y \leq 1-x\}$ est un domaine régulier découpable en tranches verticales et ρ est continue. Dès lors,
$$\begin{aligned} M &= \iint_D (1-x^2)\,dxdy = \iint_{D^-} (1-x^2)\,dxdy + \iint_{D^+} (1-x^2)\,dxdy \ \ \text{(additivité du domaine)} \\ &= \iint_{D^+} (1-(-x)^2)\,dxdy + \iint_{D^+} (1-x^2)\,dxdy \ \ \text{(changement de variables induit par } \varphi\text{)} \\ &= 2\iint_{D^+} (1-x^2)\,dxdy\,. \end{aligned}$$
On applique alors le théorème de Fubini :
$$\begin{aligned} M &= 2\int_0^1 \left(\int_{(1-x)/4}^{1-x} (1-x^2)\,dy\right) dx = 2\int_0^1 \frac{3}{4}(1-x)(1-x^2)\,dx \\ &= \frac{3}{2}\int_0^1 \left(x^3-x^2-x+1\right)\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right) = \boxed{\frac{5}{8}}. \end{aligned}$$

4. On procède comme dans la question précédente :
$$J = 2\iint_{D^+} y(1-x^2)\,dxdy = 2\int_0^1 \left(\int_{(1-x)/4}^{1-x} y\,(1-x^2)\,dy\right) dx$$
par symétrie et Fubini. Il reste à calculer :
$$\begin{aligned} J &= 2\int_0^1 (1-x^2)\left[\frac{y^2}{2}\right]_{(1-x)/4}^{1-x} dx = 2\int_0^1 (1-x^2)\frac{15}{32}(1-x)^2\,dx \\ &= \frac{15}{16}\int_0^1 (1-x^2)\left(x^2-2x+1\right)\,dx = \frac{15}{16}\int_0^1 \left(-x^4+2x^3-2x+1\right)\,dx \\ &= \frac{15}{16}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{4}-\frac{2}{2}+1\right) = \frac{3\times 5}{8\times 2}\cdot\frac{3\times 2}{5\times 4} = \boxed{\frac{9}{32}}. \end{aligned}$$

5. Les coordonnées du centre de gravité de D sont donc $(x_G\,,y_G) = \left(\dfrac{I}{M}\,,\dfrac{J}{M}\right) = \boxed{\left(0\,,\dfrac{9}{20}\right)}$.

Exercice 5.

Pour tout $(x, y) \in [0\,,2] \times [0\,,2]$, on a $\left|\arctan\left(x^{12}y^3\right)\right| < \dfrac{\pi}{2}$ et $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{2+2} = 2$ par croissance de la fonction racine carrée. Dès lors, par croissance / monotonie de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\left|\iint_{[0,2]\times[0,2]} \left(\frac{1}{\pi}\arctan\left(x^{12}y^3\right) + \frac{\sqrt{x+y}}{2}\right) dxdy\right| &\leq \iint_{[0,2]\times[0,2]} \left|\frac{1}{\pi}\arctan\left(x^{12}y^3\right) + \frac{\sqrt{x+y}}{2}\right| dxdy \\ &\leq \iint_{[0,2]\times[0,2]} \frac{1}{\pi}\left|\arctan\left(x^{12}y^3\right)\right| dxdy + \iint_{[0,2]\times[0,2]} \frac{\sqrt{x+y}}{2}\, dxdy \\ &\leq \iint_{[0,2]\times[0,2]} \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}\, dxdy + \iint_{[0,2]\times[0,2]} \frac{2}{2}\, dxdy \\ &\leq 4 \times \frac{1}{2} + 4 \\ &\boxed{\leq 6}\,.\end{aligned}$$

Remarque. On pouvait aussi procéder par encadrements, avec les mêmes arguments pour les deux fonctions composant l'intégrande : pour tout $(x, y) \in [0\,,2] \times [0\,,2]$,

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{\pi}\arctan\left(x^{12}y^3\right) + \frac{\sqrt{x+y}}{2} \leq \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} + 1 = \frac{3}{2}\,.$$

On conclut par croissance / monotonie de l'intégrale que

$$-2 \leq \iint_{[0,2]\times[0,2]} \left(\frac{1}{\pi}\arctan\left(x^{12}y^3\right) + \frac{\sqrt{x+y}}{2}\right) dxdy \leq 6$$

ce qui donne le résultat.