PeiP1/C — Polytech Paris-Sud
Mathématiques 2 — 2019–2020

Feuille d'exercices n°1

Intégrales simples (rappels) et doubles (introduction)

Exercice 1 - *Échauffement.*

1. Soient f et g des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Exprimer les dérivées de $f+g$, $f \cdot g$, $f \circ g$.

2. Rappeler les domaines de définition, les images, puis dériver les fonctions cos, sin, tan, ln, exp.

3. Même question avec les fonctions arccos, arcsin, arctan.

Exercice 2 - *Intégrales simples : révisions de méthodes de calculs.*

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la méthode suggérée.

1. $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$, à l'aide d'une intégration par parties.

2. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$, à l'aide du changement de variables $x = \ln(u)$.

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx$, à l'aide du changement de variable $u(x) = \cos x$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{x^2-4}\,dx$, à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

Exercice 3 - *Détermination de primitives.*

1. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de chacune des fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{x-7}\,, \quad g : x \mapsto \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right), \quad h_a : x \mapsto \ln(x-a) \text{ (pour } a \in \mathbb{R} \text{ et } x > a).$$

2. Dériver la fonction $x \mapsto \ln(\cos x)$. En déduire (toutes) les primitives de la fonction tangente.

3. Déterminer (toutes) les primitives des fonctions :

$$f : x \mapsto xe^x\,, \quad g : x \mapsto \ln(1+x^2)\,, \quad h_\alpha : x \mapsto x^\alpha \text{ (pour } x > 0, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 4 - *Intégrale et aire sous la courbe représentative.*

1. Soient a et b des réels positifs. Calculer puis interpréter géométriquement les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^a bx\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,.$$

2. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, des fonctions continues telles que $f \leq g$. Interpréter géométriquement l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$.

Indication. On pourra commencer par considérer les cas $0 \leq f \leq g$ et $f \leq 0 \leq g$.

Exercice 5 - *Relation entre intégrale et primitive.*

Soit $f, \varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose de plus φ et ψ de classe C^1. On note par $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)\, dy$ pour tout réel x.

1. Soit F une primitive quelconque fixée de f. Montrer que $g(x) = F \circ \psi(x) - F \circ \varphi(x)$.

2. En déduire que g est C^1 et donner l'expression de sa dérivée g', en fonction de f, φ et ψ.

Exercice 6 - *Dessins de domaines du plan.*

Représenter les domaines suivants du plan :

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq x+1,\ 0 \leq y,\ y+2x \leq 4\}\,,\\
D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq -2,\ -1 \leq y \leq 1,\ y \geq x-3\}\,,\\
D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 \leq x \leq 1,\ y \leq x^2+1,\ y \geq 2x,\ y \geq -2x\}\,,\\
D_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ y \leq \sqrt{3}\,x,\ x \leq \sqrt{3}\,y\}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 7 - *Découpages en tranches et calculs d'aires.*

Pour chaque domaine D de l'exercice précédent :

1. déterminer géométriquement les tranches verticales $D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = a\}$ (vide ou pas ? extrémités ? etc.), pour toutes les valeurs du paramètre réel a.

2. Déterminez de même les tranches horizontales $D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = b\}$ pour tout $b \in \mathbb{R}$.

3. Pour $i = 1$, 2 et 3, donner les deux expressions de l'aire de D_i, par décomposition en tranches horizontales *et* verticales. Puis calculer l'aire en choisissant l'une de ces expressions.

Exercice 8 - *Premiers calculs d'intégrales doubles.*

1. Calculer les intégrales doubles $\displaystyle\iint_{D_i} x\, dxdy$ pour les domaines D_i de l'exercice 5 pour $i = 1$, 2, 3.

2. Donner les abscisses des centres de gravité des domaines précédents, supposés *homogènes* (c'est-à-dire de densité constante).

3. Donner les ordonnées de ces centres de gravité.

Exercice 9 - *Estimation d'intégrales doubles.*

Sans chercher à calculer explicitement les intégrales doubles ci-dessous, montrer que

1. $\displaystyle\iint_C \cos^2(x+y)\, dxdy = \pi^2 - \iint_C \sin^2(x+y)\, dxdy$, où C est le carré $[0,\pi] \times [0,\pi]$.

2. $\displaystyle\iint_{C_{a,b}} e^{x^2+y^2}\, dxdy \geq ab$, où $C_{a,b}$ est le rectangle $[0,a] \times [0,b]$ (avec a et $b > 0$).

3. $\displaystyle\left| \iint_D \arctan(x^{2019} + y^{2020})\, dxdy \right| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \mathrm{Aire}(D)$, pour tout domaine régulier D.