Devoir Maison (14–15 mai 2020)

Ce devoir est constitué de 4 exercices indépendants.

Toute réponse doit être *justifiée*. Le barème donné est *indicatif*.
Le soin apporté à la rédaction sera pris en compte.

Exercice 1 (7 points).

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\overrightarrow{u_1} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{u_3} = (1,1,0)$.

1. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que le noyau de f soit engendré par $\overrightarrow{u_1}$, et l'image de f soit le plan engendré par $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$.

2. Donner un exemple d'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que l'image de g soit engendrée par $\overrightarrow{u_1}$, et le noyau de g soit le plan engendré par $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$.

3. On considère l'application linéaire $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $h(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_2}$, $h(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_3}$ et $h(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{u_1}$.

(a) Pourquoi h, ainsi définie, est-elle unique ?

(b) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de h n'est constituée que de 1 et de 0.

(c) Donner la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (4 points).

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel E engendré par les vecteurs $(1,2,1,2)$, $(2,1,1,3)$, $(3,0,1,4)$ et $(1,5,2,3)$.

1. Calculer la dimension de E et en donner une base.

2. Déterminer un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

3. Le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\big((1,0,2,0),(0,3,1,1)\big)$ est-il un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 3 (4,5 points).

On note $\mathcal{B}_3 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ la matrice dans $\mathcal{B}_3$ d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}'$ constituée de $\overrightarrow{u_1} = (1,-1,-1)$, $\overrightarrow{u_2} = (2,1,-1)$ et $\overrightarrow{u_3} = (-3,1,2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}'$.

2. Déterminer $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
Indication. On pourra déterminer A' en calculant les images de vecteurs bien choisis...

3. Expliquer la signification géométrique de f et en déduire que $A^n = A$ pour tout n.

$\boxed{!!}$ **Exercice 4** $\longrightarrow$

Exercice 4 (6,5 points).

On considère qu'un individu endetté a une chance sur six de ne plus être endetté l'année suivante, alors qu'un individu non endetté a deux chances sur trois de le rester (l'année suivante).

On dénote par $X(n) = \binom{e(n)}{p(n)}$ le vecteur dont les composantes sont :

- $e(n)$: la probabilité que l'individu soit <u>e</u>ndetté, et
- $p(n)$: la probabilité qu'il ne soit <u>p</u>as endetté

pendant l'année n.

1. Expliquer pourquoi $e(n)$ et $p(n)$ sont compris entre 0 et 1, et pourquoi $e(n) + p(n) = 1$.

2. Donner le graphe de la chaîne de Markov associée (en précisant les probabilités de transitions qui ne sont pas données dans l'énoncé).
Rappel. Le graphe est le diagramme donnant tous les états possibles reliés par des flèches indiquant les probabilités respectives de passer d'un état à l'autre (voir Félix le chat de l'**Application 3**).

3. Donner la matrice de transition A associée, i.e. la matrice telle que $X(n+1) = AX(n)$.

4. Expliquer pourquoi il existe un unique état stationnaire.

5. Déterminer le noyau de $A - I_2$ (où I_2 est la matrice identité de $\mathbb{R}^2$), en déduire l'état stationnaire.

6. Interprétation. Lorsque le nombre d'année tend vers l'infini, quelle est la probabilité qu'un individu soit endetté ? Dépend-elle de la condition initiale « être endetté ou pas » à l'année 0 ?

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à A. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ avec $\overrightarrow{u_1} = (2, 1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (1, -1)$.

7. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer A' la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

8. Calculer $(A')^n$ pour tout entier $n \geq 1$, par récurrence sur n.

La question suivante ne fait pas partie du DM. (Elle ne sera pas notée mais vous apportera la gloire.)

9. En déduire que pour toute condition initiale $X_0 = \binom{e_0}{p_0}$, la suite $X(n) = A^n X_0$ converge vers l'état stationnaire quand n tend vers l'infini. Que venons-nous de prouver ?

Instructions. Ce DM est à rendre avant *vendredi 15 mai, à 18h00*. Le « rendre » signifie :

- transformer votre copie en un fichier (unique) au format pdf,
- lui donner le nom : Nom_Prenom_DM.pdf (où Nom et Prenom sont ... vos nom et prénom),
- transférer le fichier via : `https://mycore.core-cloud.net/index.php/s/3cOLCt8Dzj3yzR6`,
- vérifier que la page indique bien que votre document a été transféré.

En cas de doute, la page `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~leclercq/liste.html` recense les fichiers transférés (avec un délai de moins de 30 minutes).