Contrôle 2

durée : 1h30 – date : 10/03/2020

Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.

Ce devoir comporte 1 page et est constitué de 5 exercices indépendants.

Toute réponse doit être *justifiée*. Le barème donné est *indicatif*.
Le soin apporté à la rédaction et aux dessins sera pris en compte.

Exercice 1 (3 points).

Utiliser l'algorithme de Gauss–Jordan pour résoudre le système : $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$

Exercice 2 (6 points).

On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = m \end{cases}$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre $(\mathcal{S})$ en fonction de m.

2. Donner la matrice A associée au (membre de gauche du) système $(\mathcal{S})$ et spécifier son rang.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à A dans la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Donner l'image des vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ par f. Calculer l'image par f du vecteur $(3, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de m, le vecteur $(2, 2, m)$ admet-il un antécédent par f ?

Exercice 3 (5 points).

1. Déterminer la matrice associée (dans la base canonique) à l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (\frac{x}{2} - \frac{y}{2}, -\frac{x}{2} + \frac{y}{2})$.

2. Quelle est l'image par f du carré $\mathcal{C} = [0,1] \times [0,1]$? On dessinera $\mathcal{C}$ et son image, en faisant apparaître les sommets de $\mathcal{C}$ et leurs images respectives.

3. Déterminer une droite vectorielle $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ dont les vecteurs sont invariants par f, i.e pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathcal{D}$, $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. On en spécifiera l'équation cartésienne et un vecteur générateur.

4. Déterminer une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dont tous les vecteurs sont envoyés sur $\overrightarrow{0}$ par f.

Exercice 4 (5 points).

1. Soit $\overrightarrow{u} = (1, 0, -1)$ et $\overrightarrow{v} = (2, 1, -1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{P}$ soit défini par l'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle $\mathcal{P}_\lambda \subset \mathbb{R}^3$ le plan défini par l'équation cartésienne $x - y + \lambda z = 0$. Trouver deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (pouvant dépendre de λ) qui engendrent $\mathcal{P}_\lambda$.

3. Déterminer la nature de $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{P}$ en fonction de λ. S'il s'agit d'une droite, en donner un vecteur directeur.

Exercice 5 (3 points).

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $g(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) = (1, 0, 1)$ et $g(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}) = (3, 2, 1)$. Donner la matrice B associée à g dans les bases canoniques.