Conséquence Toute matrice de passage est inversible (puisque id est bijective).

De plus, $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\underbrace{id^{-1}}_{id}) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Rmq. (Terminologie).

(!) Rappel. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ donne les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathcal{B}$ quand on les connaît dans $\mathcal{B}'$.

i.e $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ "pousse" les objets de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Exple. $f : E \to F$ $\quad \mathcal{B}_E$ base de E, $\mathcal{B}_F$ de F.

$\leadsto F = C_{\mathcal{B}_F} \circ f \circ L_{\mathcal{B}_E}$.

$$F \circ P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_E'} = (C_{\mathcal{B}_F} \circ f \circ \overbrace{L_{\mathcal{B}_E}) \circ (C_{\mathcal{B}_E}}^{=id} \circ L_{\mathcal{B}_E'})$$

$$= C_{\mathcal{B}_F} \circ f \circ L_{\mathcal{B}_E'}.$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \times P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}_E'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E', \mathcal{B}_F}(f).$$

On passe de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}_E'$.

Cours du 31/03/2020

4) Cas particulier des endomorphismes.

Rappel : Matrices de changement de bases ce sont les matrices associées à l'$\underline{id}$ dans des bases bien choisies. $id : E \to E$, $x \mapsto x$.

Thm. E (s)ev de dim n. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E.
$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans $\mathcal{B}$ (et $\mathcal{B}$) et
$A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ ——— $\mathcal{B}'$ (et $\mathcal{B}'$).
P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$

dém. 1. Avec ce que l'on vient de voir :

$$A \cdot P = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \cdot P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$$

L'image de X par AP est donc donnée dans $\mathcal{B}$. $(Y = APX)$
Pour l'obtenir dans la base $\mathcal{B}'$, il faut multiplier $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$.

$$\leadsto P^{-1}(Y) = P^{-1}(APX) = \underbrace{P^{-1}AP}_{= \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)} \cdot X. \quad ✓$$

b. "Comme un sourire" :

$$P^{-1}AP = (C_{B}\circ L_{B'})^{-1}\circ(C_{B}\circ f\circ \overbrace{L_{B})\circ(C_{B}}^{id.}\circ L_{B'})$$

(← $Mat(C_B \circ L_{B'})$

$Mat(C_B\circ f\circ L_B)$

$$= C_{B'}\circ \underbrace{\overset{C_B^{-1}}{L_{B}}\circ C_{B}}_{id}\circ f\circ L_{B'} = C_{B'}\circ f\circ L_{B'}.$$

$$= Mat_{B'}(f) \quad ✓ \; \square$$

Rmq : b'. $P^{-1}AP = (C_B\circ id\circ L_{B'})^{-1}\circ(C_B\circ f\circ L_B)\circ(C_B\circ id\circ L_{B'})$

$$=(Mat_{B',B}(id))^{-1}\cdot Mat_{B,B}(f)\cdot Mat_{B',B}(id)$$

$$= Mat_{B,B'}(id)\cdot \_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_ .$$

$$= Mat_{B',B'}(id\circ f\circ id) = A \quad ✓.$$

Expl. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tq $Mat(f) = A$.

Soit $B' = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ avec

$\vec{u_1} = (1,1,0)$, $\vec{u_2} = (0,1,1)$, $\vec{u_3} = (1,1,1)$.

a. Mq B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

$U_i = \vec{u_i}$ en colonne

On forme $P\,(U_1 \mid U_2 \mid U_3)$ et on échelonne :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix} & \begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix} \end{pmatrix} \\ U_1 \end{array} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 pivots $= \dim(\mathbb{R}^3)$ donc

B' est libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Interprétation de P ? $P = Mat_{B',B}(id)$ ← base canonique de $\mathbb{R}^3$.

et donc $P = P_{B}^{B'}$.

c. Calculer $Mat_{B'}(f)$.

c1. On calcule P^{-1} puis $P^{-1}AP$.

c2. On détermine les coordonnées de $f(\vec{u_i})$ dans B'.

Or $f(\vec{u_1}) = AU_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \vec{u_1}$ — $(1,0,0)_{B'}$; $f(\vec{u_2}) = \vec{u_2}$ — $(0,1,0)_{B'}$,

$f(\vec{u_3}) = (-1,-1,-1) = -\vec{u_3}$. — $(0,0,-1)_{B'}$.

$$Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Géométriquement, f est la symétrie par rapport au plan vect $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ le long de la droite $D_{\vec{u_3}}$.
(ce n'est pas une symétrie orthogonale -).

Rmq. ! Ce qui est vrai pour f doit être vérifié pour toute matrice de f, $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ pour toutes bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

Exple. $f \circ f = id$ -

- facile à voir sur $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ $\left(Mat_{\mathcal{B}'}(f)\right)^2 = I_3$
- pas évident pour A et partant $A^2 = I_3$!

5 Trace et déterminant des endomorphismes.

déf $f : E \to E$ un endomorphisme. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on définit la trace de f dans $\mathcal{B}$ par : $\underbrace{Tr}_{\text{Trace}}(Mat_{\mathcal{B}}(f))$ = somme des éléments diagonaux de $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Rmq. $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ matrice carrée, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & & ? \\ & \ddots & \\ ? & & a_{nn} \end{pmatrix}$
$Tr(M) = a_{11} + a_{22} + \dots a_{nn}$.

Thm. La trace de f ne dépend pas de la base choisie.
On l'appelle donc (simplement) trace de f.

dém.. $Tr(BC) = Tr(CB)$ $\left(\neq Tr(B) \cdot Tr(C)\right)$
calcul direct.

Or pour passer de $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ à $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$,
$A' = P^{-1}AP = P^{-1} \cdot (AP)$

$Tr(A') = Tr(\underbrace{P^{-1}}_{B} \cdot \underbrace{(AP)}_{C}) = Tr(\overbrace{(AP) \cdot P^{-1}}^{id}) = Tr(A)$ □

Hors programme

Thm. $n = 2$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Pour toute base de E, $\det(Mat_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de $\mathcal{B}$.
C'est le déterminant de f.

Encore plus hors-programme : vrai pour tout n.

dém. $Dét(BC) = Dét(B) \cdot Dét(C)$. □