4.2 Bases et coordonnées

$\mathbb{R}^n$ a une *base* dite canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots \overrightarrow{e_n})$: tout vecteur $\overrightarrow{v}$ *s'écrit de manière unique* comme combinaison linéaire $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots + x_n\overrightarrow{e_n}$, ou encore tout vecteur $\overrightarrow{v}$ est déterminé par *ses coordonnées* $(x_1, x_2, \dots x_n)$.

BUT. Définir les mêmes notions pour tout sev E de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. On commence par le plus petit sev : la droite.

Soit $\mathcal{D}$ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ non nul. Tout point $\overrightarrow{v}$ de cette droite s'écrit $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette décomposition est évidemment unique (car $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{u}$ nécessite que $\lambda = \mu$) et la donnée de λ détermine $\overrightarrow{v}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est une *base* de la droite $\mathcal{D}$ dans laquelle $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnée (λ).

Évidemment le vecteur $\overrightarrow{u}' = 2\overrightarrow{u}$ est aussi une base de $\mathcal{D}$: tout vecteur $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{u}'$ avec $\mu = \frac{\lambda}{2}$ puisque $\mu\overrightarrow{u}' = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{u}' = \frac{\lambda}{2}(2\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. Dans cette base, $\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(\mu) = (\frac{\lambda}{2})$.

Plus généralement,

Définition 4.5. Soit E un sev de $\mathbb{R}^n$.

- La famille $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de E est une *base* de E si tout vecteur $\overrightarrow{v} \in E$ s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_i}$:
$$\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} \quad \text{avec } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_p \in \mathbb{R}.$$
- Les λ_i sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{v}$ dans la base B, on note $\overrightarrow{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)_B$.

Exemple (Bases de $\mathbb{R}^2$). La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est bien une base de $\mathbb{R}^n$ (ouf!) puisque tout vecteur $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \dots x_n\overrightarrow{e_n}$. Remarquez que les *composantes* du vecteur $\overrightarrow{v}$, $(x_1, x_2, \dots x_n)$, sont ses coordonnées dans la base canonique. Ce n'est plus vrai dans une autre base.

Soient $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$. La combinaison linéaire $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}$ se réécrit
$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} = \lambda_1(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) + \lambda_2(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}) = (\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{e_1} + (\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{e_2}.$$
Donc le vecteur $\overrightarrow{v}$ de composantes (x_1, x_2) s'écrit $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}$ si et seulement si $\lambda_1 + \lambda_2 = x_1$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = x_2$ ou encore $(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1-x_2}{2}\right)$. Donc :

- $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et
- les coordonnées de $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2)$ dans B sont $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1-x_2}{2}\right)_B$.

Exemple (Bases d'un plan de $\mathbb{R}^n$). Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2} \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs non colinéaires et $P = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ le plan qu'ils engendrent.

Toute paire de vecteurs $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ non colinéaires de P est une base de P.

Démonstration. Comme $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des vecteurs de P, il existe des nombres réels λ_1, μ_1 et λ_2, μ_2 tels que $\overrightarrow{v_1} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \mu_1\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{v_2} = \lambda_2\overrightarrow{u_1} + \mu_2\overrightarrow{u_2}$. On peut donc réarranger

$$a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2} = a\,(\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \mu_1\overrightarrow{u_2}) + b\,(\lambda_2\overrightarrow{u_1} + \mu_2\overrightarrow{u_2}) = (a\lambda_1 + b\lambda_2)\,\overrightarrow{u_1} + (a\mu_1 + b\mu_2)\,\overrightarrow{u_2}\,.$$

Donc tout vecteur de P, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}$, s'écrit $a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}$ s'il existe a et b tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} a\lambda_1 + b\lambda_2 & = & \lambda \\ a\mu_1 + b\mu_2 & = & \mu \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de la matrice $\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} = \lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2 \neq 0$, alors la matrice est inversible et a et b existent bien. C'est un petit exercice de voir que si au contraire, $\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2 = 0$, alors $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont colinéaires, ce qui n'est pas possible.

Tout vecteur de P s'écrit donc sous la forme $a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2}$ et il reste à montrer que cette écriture est unique. Supposons que $a\overrightarrow{v_1} + b\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v} = a'\overrightarrow{v_1} + b'\overrightarrow{v_2}$. Alors, $(a - a')\overrightarrow{v_1} = (b' - b)\overrightarrow{v_2}$ et nécessairement $a = a'$, $b = b'$ car sinon (de nouveau) $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ seraient colinéaires, ce qui n'est pas possible. $\square$

Exemple. Soient $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 2, 3)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, ils forment donc une base du plan $P = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ qu'ils engendrent. Le vecteur de P, $\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}$, *vu comme un élément de* P, a pour coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2)_B$ dans la base $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ de P.

Vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ (et non pas de P), ses coordonnées dans la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ sont $(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 3\lambda_2)$.

4.3 Notion d'indépendance linéaire

Définition 4.6. Une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est **libre** si les seuls nombres réels λ_1, λ_2, $\ldots\lambda_p$ tels que $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$ sont tous nuls. Les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{v_p}$ dont dits **linéairement indépendants**.

Une famille qui n'est pas libre est **liée**, ses vecteurs sont **linéairement dépendants**.

L'application linéaire

$$L_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \text{ définie par } L_{\mathcal{F}}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p}$$

est dite **combinaison linéaire suivant** $\mathcal{F}$.

L'image de $L_{\mathcal{F}}$ est constituée de l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$, autrement dit on peut rafiner la définition $L_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^p \to E_{\mathcal{F}}$ où $E_{\mathcal{F}} = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$.

La linéarité de $L_{\mathcal{F}}$ est un exercice (facile – mais à faire !). Il est également facile de voir que par définition de libre, et par le « lemme improvisé » du 3 mars :

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \quad \iff \quad \ker(L_{\mathcal{F}}) = \{\overrightarrow{0}\} \quad \iff \quad L_{\mathcal{F}} \text{ est injective}\,.$$

On obtient donc :

Proposition 4.7. *La famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ est libre si et seulement si tout $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$ admet* au plus une *décomposition sous forme de combinaison linéaire $\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p}$.*

De cette proposition, découle la suivante.

Proposition 4.8. *Une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ d'un sev E en est une base si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre et engendre E (i.e. $E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$).*

Ceci équivaut au fait que $L_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^p \to E$ est un isomorphisme.

En effet, comme les éléments de $\mathcal{F}$ sont des vecteurs de E, $E_{\mathcal{F}} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}) \subset E$. Pour que $\mathcal{F}$ soit une base de E, tout élément de E doit se décomposer en combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$ et donc $E = E_{\mathcal{F}}$. De plus, cette écriture est unique si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre par la proposition précédente.

Définition 4.9. Soit $\mathcal{B}$ une base du sev $E_{\mathcal{B}}$: l'application combinaison linéaire selon $\mathcal{B}$ est un isomorphisme. On appelle l'application linéaire réciproque **application coordonnées dans la base $\mathcal{B}$**.

Notée $C_{\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}}^{-1} : E_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}^p$, elle est définie pour tout $v = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p} \in E_{\mathcal{B}}$, par $C_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v}) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p)$.

Les « coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{v}$ », $C_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{v})$, sont donc bien les « coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathcal{B}$ », $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p)_{\mathcal{B}}$!