S.T.I.D. 2e année groupe PE

Janvier 2009

EPREUVE D'ALGEBRE (durée : 1 heure 45)

(fiches de cours autorisées, calculatrice interdite).

Exercice 1 (10 points)

Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On pose $f_1 = (1,0,1)\,, f_2 = (1,1,0)\,, f_3 = (0,1,-1)$ et on note F le sous-espace vectoriel engendré par $\{f_1, f_2, f_3\}$.

1. Le système $\{f_1, f_2, f_3\}$ est-il une base de F ?
2. Construire une base **orthonormale** de F (au sens du produit scalaire usuel). On notera $\mathcal{G}$ cette base.
3. Calculez la projection orthogonale du vecteur $u = (1,2,3)$ sur le sous-espace F (au sens du produit scalaire usuel). Calculez de même la projection orthogonale du vecteur $v = (1,-1,-1)$.
4. Soit P_F le projecteur orthogonal sur le sous-espace F. Vérifiez que la matrice A ci-dessous est bien la matrice associée à P_F (par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

5. <u>Sans calcul</u>, indiquez les vecteurs propres évidents de A ainsi que les valeurs propres associées.
6. Proposez deux matrices P (orthogonale) et D (diagonale) permettant d'écrire :

$$A = P\,D\,{}^tP$$

7. La matrice A permet-elle de définir une produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$? (justifiez correctement votre réponse).

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ (10 points)

Soit f la forme bilinéaire symétrique de $E = \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ associée à la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 4 & 8 & -4 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soient $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments quelconques de $\mathbb{R}^3$. Donnez l'expression de $f(u, v)$, puis donnez l'expression de la forme quadratique $q(u)$ associée à la forme bilinéaire f.
2. Calculer les valeurs propres de B et les multiplicités respectives. Calculer les sous-espaces propres associés.
3. En déduire la forme réduite de la forme quadratique q.
4. La forme bilinéaire f est-elle définie ? positive ? définit-elle un produit scalaire ? admet-elle un maximum ? un minimum ? (vous justifierez en détail vos réponses à toutes ces questions).
5. Quels sont les vecteurs u de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $q(u) = 0$?