10 - 18 - P5 - P2 - P8

S.T.I.D. 2e année groupe PE — Décembre 2007

EPREUVE D'ALGEBRE (durée : 2 heures)

(~~sans~~ document, sans calculatrice).

Exercice 1 (12 points)

Soit $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On définit $\mathcal{F} = \{f_1 = e_1, f_2 = e_2 - e_3, f_3 = e_3 + e_4\}$ et on note F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$.

1. Le système $\mathcal{F}$ est-il une base de F ? (justifiez clairement votre réponse !).
2. Construire une base **orthonormale** de F à partir de $\mathcal{F}$. On notera $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$ cette base et on exprimera g_1, g_2, g_3 en fonction de e_1, e_2, e_3, e_4.
3. Quelle est la dimension de $F^\perp$ le sous-espace de E orthogonal à F ? Proposez une base orthonormée de $F^\perp$.
4. Le tableau ci-dessous donne les produits scalaires (au sens du produit scalaire usuel) entre les g_i $(i = 1, \cdots, 3)$ et les e_j $(j = 1, \cdots, 4)$. Reproduisez ce tableau sur votre copie et complétez les valeurs manquantes.

	e_1	e_2	e_3	e_4
g_1	1	0	?	?
g_2	0	$1/\sqrt{2}$	?	?
g_3	0	?	$1/\sqrt{6}$	?

5. Soit $u = (x, y, z, t)$ un élément quelconque de E. Calculez $P_F(u)$ la projection orthogonale de u sur F. (Donnez l'expression de $P_F(u)$ dans la base $\mathcal{G}$ puis dans la base canonique $\mathcal{E}$). En déduire que la matrice A associée à P_F (par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$) est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

6. Nous souhaitons à présent diagonaliser la matrice A associée à P_F :

   (a) Connaissez-vous des vecteurs propres évidents de A ? Quelles sont les valeurs propres associées ?

   (b) Calculez le polynôme caractéristique de A et retrouvez les valeurs propres avec leur multiplicité respective.

   (c) Donnez (sans calcul supplémentaire) la matrice P permettant de mettre A sous la forme $PD\,{}^tP$ où D désigne la matrice diagonale des valeurs propres de A (ordonnées par valeurs décroissantes).

7. On appelle *trace* d'une matrice carrée A la somme de tous ses termes diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{ii}$.

   (a) Quelle est la trace de la matrice A associée à P_F ?

   (b) Démontrez la propriété élémentaire suivante : $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$ où A et B sont deux matrices carrées quelconques de même dimension.

   (c) Appliquez ce résultat à l'écriture $PD\,{}^tP$ de A ; quel résultat fondamental trouvez-vous concernant la trace de la matrice A d'une projection orthogonale P_F ?

Exercice 2 (8 points)

Soit f la forme bilinéaire de $E = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ associée à la matrice B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Soit $u = (x, y, z, t)$ un élément quelconque de E. Donnez l'expression de la forme quadratique $q(u)$ associée à la forme bilinéaire f.

2. Calculer les valeurs propres de B et les multiplicités respectives. (Indication : $\lambda = 6$ est valeur propre).

3. Calculer les sous-espaces propres associés. En déduire une base **orthogonale** de E en utilisant les vecteurs propres trouvés.

4. En déduire la forme réduite de la forme quadratique q.

5. La forme bilinéaire f est-elle symétrique ? définie ? positive ? définit-elle un produit scalaire ? admet-elle un maximum ? un minimum ? (vous justifierez en détail vos réponses à toutes ces questions).