DEFORMATION CONFORME DES SURFACES NON COMPACTES A COURBURE NEGATIVE

Dominique Hulin

Journal of Funct. Anal. 111, pp. 449-472 (1993)

0. INTRODUCTION

Ce travail fait suite à [HT1] et [HT2] dans lesquels nous étudions le problème de la courbure prescrite sur les surfaces de Riemann ouvertes de type fini ; les résultats obtenus dans ces articles concernent essentiellement les surfaces complètes à courbure totale finie (qui sont alors de type parabolique), et les surfaces complètes admettant au moins un bout hyperbolique.

Soit maintenant S' une surface de Riemann ouverte connexe, et de type fini. On suppose que S' possède au moins un bout hyperbolique, *ou bien* que $\chi(S') < 0$, et l'on se donne $K_1 : S' \to \mathbf{R}$ lisse avec $K_1 \leq 0$ et $-a^2 \leq K_1 \leq -b^2 < 0$ hors d'un compact de S'.

D'après [HT1] 8.2 (voir 1.6 ci-dessous), il existe une unique métrique conforme complète g_1 de courbure K_1 sur S'. Notre but ici est d'étudier sous quelle condition une fonction K, "proche" de K_1 mais non partout négative, peut encore se réaliser comme courbure d'une métrique conforme complète sur S' : si S' admet un bout hyperbolique, un contrôle en norme L^p – pour un exposant $p > 1$ – de la différence $K - K_1$ conviendra (4.3) (comparer à [AMcO] qui résolvent ce problème sur le disque, et sous des hypothèses ponctuelles sur K).

Voir également [KW] 9,10 pour une discussion dans le cas compact.

Notons S le compactifié conforme de S' (qui est une surface à bord lorsque S' admet des bouts hyperboliques, cf. 4.), que l'on munit d'une métrique lisse conforme g_0 de référence. On note $g_1 = \rho\, g_0$.

Théorème A : (4.4, 6.1) *Soit $k : S' \to \mathbf{R}$ lisse avec $k \geq 0$.*

Si S' admet au moins un bout hyperbolique, on suppose que, pour un exposant $p > 1$, $k\rho \in L^p(S, g_0)$. Sinon, on suppose que $k \equiv 0$ hors d'un compact de S'.

Il existe alors une constante $C = C(K_1, k) > 0$ telle que toute fonction lisse $K \;: S' \to \mathbf{R}$ satisfaisant

$$K_1 \leq K \leq K_1 + C\, k$$

est courbure d'une métrique conforme complète sur S'.

Remarques : i) Le cas où $K_1 = \inf(K, 0)$ et $k = \sup(K, 0)$ est le plus naturel. Cependant l'énoncé général ci-dessus est commode pour traiter des exemples : voir en 5. où l'on prescrit, pour courbure d'une métrique complète sur le disque pointé, quasi-isométrique à la métrique de Poincaré, une fonction qui prend des valeurs positives jusqu'à l'infini (dans le cusp et le bout hyperbolique).

ii) Les bouts paraboliques décrits par ce théorème sont des cusps (complets, de volume fini), conformément quasi-isométriques à la pseudo-sphère de Beltrami. On peut prescrire d'autres types de quasi-isométrie (voir les énoncés 4.1 et 6.1). Voir aussi le récent preprint de T. Junjie [J] pour d'autres conditions d'existence.

Nous donnons également en 3. deux obstructions à l'existence d'une métrique complète de courbure "trop positive" sur une surface admettant un bout hyperbolique, ou de caractéristique d'Euler négative (voir encore [KW], [AMcO], et [J]).

En combinant le théorème A, et les obstructions mentionnées ci-dessus, on obtient le résultat suivant.

Exemple B : (3.2, 5.1) *Soient* (S', h) *une surface de Riemann connexe de type fini avec au moins un bout hyperbolique, munie de sa métrique hyperbolique,* $m \in S'$ *et* $r_0 > 0$*. On cherche des conditions sous lesquelles une fonction lisse* $K : S' \to [-1, c]$ *(où* $c > 0$*) satisfaisant*

$$K \equiv -1 \quad \text{hors de} \quad B(m, r)\,, \qquad K \equiv c > 0 \quad \text{sur} \quad B(m, r/2)\,,$$

avec $0 < r < r_0$*, est courbure d'une métrique conforme complète sur* S'*.*

Pour tout $p > 1$*, il existe une constante* $A_p = A(p, m, r_0)$ *telle que :*
une condition nécessaire d'existence est

$$c\, r^2 \leq 4\pi\,,$$

tandis qu'une condition suffisante d'existence est

$$c\, r^{2/p} \leq A_p\,.$$

La démonstration du théorème A est obtenue par déformation conforme : on part de la métrique conforme g_1 sur S' (de courbure K_1) et l'on cherche g sous la forme $g = \mathrm{e}^{2u} g_1$, où u doit satisfaire l'équation "de la courbure prescrite" :

$$\Delta_1 u = K\,\mathrm{e}^{2u} - K_1. \qquad (E)$$

Cette équation aux dérivées partielles non linéaire sera résolue grâce à la méthode des sur- et sous-solutions (voir 2.), jointe dans le cas hyperbolique au théorème du point fixe de Schauder, et dans le cas parabolique (ou compact) à la méthode de continuité.

Le plan de l'article est le suivant :

1. Métriques à singularités simples.
2. Méthode des sur- et sous-solutions.
3. Lemme de Schwarz et obstructions.
4. Existence sur une surface avec un bout hyperbolique.
5. Exemples.
6. Existence sur une surface parabolique ou compacte, de caractéristique négative.

Les deux premières sections sont des rappels de résultats antérieurs.

Les résultats principaux sont énoncés et démontrés dans les sections 4. et 6. Le théorème A est une conséquence immédiate de 4.4 et 6.1.

Quelques exemples sont traités dans les sections 3. et 5.

Je tiens à remercier Marc Troyanov pour de fructueuses discussions concernant ce travail.

1. METRIQUES A SINGULARITES SIMPLES

Nous nous intéressons au problème de la courbure prescrite sur les surfaces non compactes (de type fini). Posé tel quel, le problème est trop flexible ; il est raisonnable d'imposer :

i) la classe conforme de la métrique cherchée ;

ii) le comportement de la métrique à l'infini (on est essentiellement intéréssés par des métriques complètes).

En effet, si l'on omet l'une ou l'autre de ces restrictions, on a les résultats suivants.

Théorème : ([HT1] A.1). *Soient S une surface de Riemann non compacte de type fini et $K : S \to \mathbf{R}$ une fonction localement Hölder continue bornée. Si S n'est pas conformément équivalente à $\mathbf{C}$ ou à $\mathbf{C}^*$, alors K est courbure d'une métrique conforme sur S.*

(C'est le théorème de Liouville qui fournit des obstructions pour $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}^*$.)

Théorème : (Burago-Kazdan-Warner, voir [HT1] A.2). *Soit K une fonction lisse sur une surface S non compacte et de type fini. Les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que K soit courbure d'une métrique complète sur la surface S:*

i) à chaque bout de S, $\liminf_{x\to\infty} K(x) \leq 0$;

ii) lorsque $\chi(S) < 0$: $\inf K < 0$,

lorsque $\chi(S) = 0$: $\inf K < 0$ ou $K \equiv 0$.

Soit alors S' une surface de Riemann ouverte de type fini. Le théorème d'uniformisation fournit une compactification conforme de S', c'est-à-dire une surface de Riemann compacte Σ, avec $S' \subset \Sigma$, et telle que $\Sigma \setminus S'$ soit une union finie de disques $D_1, \ldots, D_m$ et de points $p_1, \ldots, p_n$.

On note $S = \Sigma \setminus \big(D_1 \cup \ldots D_m\big)$, qui est une surface de Riemann de type hyperbolique : il est équivalent de construire une métrique conforme lisse sur S', ou une métrique conforme sur S qui possède des singularités isolées en les points $p_1, \ldots, p_n$. Il est alors commode d'introduire les notions suivantes (pour plus de détails et de motivations, on pourra consulter [T1] et [HT1]).

1.1 *Définitions :* Soit S une surface de Riemann.

i) Soit $\beta \in \mathbf{R}$. Une métrique conforme g sur S admet une *singularité simple* (resp. *normale*) d'ordre β en $p \in S$ si elle s'écrit en carte conforme autour de p comme :

$$g = \mathrm{e}^{2u}|z|^{2\beta}|dz|^2$$

avec $u \in L^1$ et $\Delta u \in L^1$ au sens faible (resp. avec $u \in W^{2,p}$ pour un exposant $p > 1$). Cette définition ne dépend pas d'un choix de carte conforme pour lequel $z(p) = 0$.

ii) Un *diviseur* β sur S est une somme formelle

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, p_i$$

où les p_i sont des points de S et les β_i des réels. Le *support* du diviseur β est l'ensemble fini $\mathrm{supp}\beta = \{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_\mathrm{n}\}$. La *caractéristique* d'Euler de (S, β) est définie par

$$\chi(S, \beta) = \chi(S) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, .$$

iii) Une métrique conforme g sur S *représente* (resp. *représente normalement*) le diviseur $\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, p_i$ si :

(a) g est de classe C^2 hors de $\mathrm{supp}\beta$;

(b) g admet en chaque p_i une singularité simple (resp. une singularité normale) d'ordre β_i $(1 \leq i \leq n)$.

On peut montrer (voir [HT1] 1.7) que, pour $\beta_i < -1$ (resp. $\beta_i > -1$), une telle métrique est complète (resp. non complète) en p_i.

La classe de métriques introduite ci-dessus est naturelle et riche. En effet :

1.2 Théorème : (Huber [Hu] et Finn [F]).

(i) Toute surface riemannienne complète, à courbure totale finie, est iso–métrique à la partie régulière d'une surface riemannienne compacte (S, g), où g représente un diviseur β sur S (dont tous les poids sont inférieurs ou égaux à -1).

(ii) De plus, si (S, β, g) est une surface de Riemann compacte, munie d'un diviseur β et d'une métrique conforme g qui représente β, la courbure totale de (S, g) est finie, et on a une formule de Gauss-Bonnet :

$$\int_S K\, dA = 2\pi\, \chi(S, \beta)\,.$$

Il est utile de pouvoir contrôler précisément le comportement asymptotique d'une métrique au voisinage d'une singularité – ou d'un bout de la variété.

1.3 *Définition :* Deux métriques conformes g_1 et $g = e^{2u} g_1$ sont dites *conformément quasi-isométriques* si la fonction u est bornée. En particulier, deux métriques conformes possédant des singularités *normales* de même ordre β en un point p sont conformément quasi-isométriques au voisinage de p (puisque $W^{2,p} \subset L^\infty$ pour $p > 1$).

1.4 *Exemple :* Le cylindre et la pseudo-sphère de Beltrami (c'est-à-dire le disque $\{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1/2\}$ muni des métriques $\dfrac{|dz|^2}{|z|^2}$ et $\dfrac{|dz|^2}{|z|^2(\log|z|)^2}$) admettent tous deux une singularité simple d'ordre -1 à l'origine. La première est une singularité normale, mais pas la seconde ; on peut observer que ces métriques ne sont pas conformément quasi-isométriques.

Le critère suivant nous sera utile pour déterminer le type des singularités (isolées) des métriques que nous construirons.

1.5 Lemme : ([HT1], 2.3). *Soient g_1 et g deux métriques conformes lisses sur le disque pointé $\Omega = \{z \in \mathbf{C}\ ,\ 0 < |z| \leq 1\}$. On suppose que g_1 admet une singularité simple d'ordre β en l'origine, que g est à courbure totale finie et est conformément quasi-isométrique à g.*

Alors g admet également une singularité simple d'ordre β en l'origine.

Après ces préliminaires, nous pouvons énoncer le résultat d'existence suivant, qui concerne la courbure négative.

1.6 Théorème : ([HT1], 8.2, 8.6, 8.9). *Soit (S, β) une surface de Riemann connexe munie d'un diviseur*

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, p_i\ + \sum_{j=1}^{m} (-1)\, q_j\,.$$

On suppose que S est compacte et que $\chi(S, \beta) < 0$, ou que S est non compacte, et que tous ses bouts sont hyperboliques. Soit g_0 une métrique lisse sur S.

Soit $K : S \setminus \mathrm{supp}\beta \to \mathbf{R}$ localement Hölder continue avec :
i) $K \leq 0$, K non identiquement nulle ;
ii) au voisinage de chaque p_i : $\quad (K(z)|z - p_i|^{2\beta_i}) \in L^p(S, g_0)$ pour un exposant $p > 1$;
iii) au voisinage de chaque q_j : $\quad -a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$.

Il existe alors une unique métrique conforme complète g_1 de courbure K sur S qui représente le diviseur β.

De plus g_1 est conformément quasi-isométrique à la pseudo-sphère de Beltrami au voisinage de chaque q_j, et au bout du disque de Poincaré au voisinage de chaque bout (hyperbolique) de S.

Nota : Voir également ([HT1] 6.1, 7.1 et 7.2) pour d'autres résultats d'exis–tence lorsque S est compacte et $\chi(S, \beta) \geq 0$.

La preuve du théorème 1.6 est basée sur la méthode des sur- et sous-solutions, que nous décrivons brièvement dans la section suivante.

2. L'EQUATION. METHODE DES SUR- ET SOUS-SOLUTIONS

On cherche à construire une métrique conforme (complète) sur S de courbure K prescrite. On va procéder par déformation conforme, en partant d'une métrique conforme g_1 (complète), de courbure K_1 (avec $K_1 \leq 0$, voire $K_1 = \inf(K, 0)$) et dont l'existence sera assurée par 1.6. On cherche alors g sous la forme $g = \mathrm{e}^{2u} g_1$, avec

$$\Delta_1 u = K\mathrm{e}^{2u} - K_1 \tag{E}$$

(et u bornée). Pour résoudre cette équation (sur la variété non compacte $S \setminus \mathrm{supp}\beta$), on va utiliser la méthode dite des sur- et sous-solutions, qui repose sur le résultat suivant.

2.1 Proposition : *Soit (M, g_0) une variété riemannienne non compacte, exhaustée par une suite de variétés compactes à bord lisses. Soient $h, h_1 : M \to \mathbf{R}$ des fonctions localement Hölder continues. On suppose qu'il existe des sur- et sous-solutions $u_\pm \in W^{1,2}_{loc} \cap C^0(M)$, et une fonction $w \in C^{2,\delta}_{loc}(M)$ telles que*

$$\Delta u_- \leq h\,\mathrm{e}^{2u_-} - h_1\,, \quad \Delta u_+ \geq h\,\mathrm{e}^{2u_+} - h_1\,, \quad u_- \leq w \leq u_+\,.$$

Alors, il existe une solution $u \in C^2(M)$ pour l'équation $\Delta u = h\,\mathrm{e}^{2u} - h_1$, qui vérifie $u_- \leq u \leq u_+$.

Ce résultat a été utilisé par exemple dans [Ni] et [Nou]. Pour une preuve détaillée, voir [HT1], Appendice C.

Pour comprendre géométriquement cet énoncé, il faut constater que si $\tilde{g} = \mathrm{e}^{2w} g_1$ est une métrique de courbure $\tilde{K}$, alors w est sur-solution (resp. sous-solution) pour (E) si et seulement si $\tilde{K} \geq K$ (resp. si $\tilde{K} \leq K$).

Pour les démonstrations que nous avons en vue, la métrique g_1 elle-même (i.e. $w = 0$) fournira une sous-solution pour (E). Le point délicat (comme toujours, cf. [KW] 11.1) sera d'exhiber une sur-solution (positive) pour (E), c'est-à-dire une métrique $g_2 \geq g_1$ de courbure $K_2 \geq K$.

3. LEMME DE SCHWARZ ET OBSTRUCTIONS

Cette partie est indépendante du reste de l'article. Son but est de dégager des obstructions à l'existence d'une métrique conforme complète de courbure “trop positive” sur une surface de Riemann S admettant un bout hyperbolique, ou de caractéristique d'Euler négative.

Un premier type d'obstruction est basé sur la version suivante, due à Marc Troyanov, du lemme de Schwarz.

3.1 Théorème : ([T2]). *Soit S une surface de Riemann connexe munie de deux métriques conformes g et g_1 de courbures respectives K et K_1. On suppose que :*
i) g est complète et K est minorée ;
ii) $K_1 \leq \inf(K, 0)$, K_1 n'est pas identiquement nulle, et $K_1 \leq -a < 0$ hors d'un compact.
Alors $g \geq g_1$.

On obtient comme corollaire le résultat suivant.

3.2 Proposition : *Soient (S,h) une surface de Riemann connexe de type fini avec au moins un bout hyperbolique, munie de sa métrique hyperbolique h, et $m \in S$. Pour qu'il existe une métrique conforme complète sur S de courbure K satisfaisant*

$$K \equiv -1 \quad \text{hors de } B(m,r)\,, \quad K \geq c \quad \text{sur } B(m,r/2)\,, \quad \text{et} \quad K \geq -1 \text{ partout,}$$

(avec c constante positive), il est nécessaire que

$$c\,r^2 \leq 4\pi\,.$$

Preuve : Considérons plus généralement une surface de Riemann connexe de type fini S, admettant un bout hyperbolique ou de caractéristique d'Euler négative, $K : S \to \mathbf{R}$ lisse avec $-a^2 \leq K \leq -b^2 < 0$ hors d'un compact de S' (ou $K < 0$ en un point si S est compacte), et g_1 l'unique métrique conforme complète de courbure $K_1 = \inf(K,0)$ sur S (1.4). D'après 3.1, s'il existe g conforme complète sur S de courbure K, on aura $g \geq g_1$.

Soit alors $\mathcal{P} = \{x \in S,\, K_1(x) = 0\} = \{x \in S,\, K(x) \geq 0\}$, que l'on supposera d'intérieur non vide. Sur $\mathcal{P}$ la métrique g_1 est plate, donc $(\mathcal{P}, g_1)$ contient isomé–triquement un disque euclidien $\{z \in \mathbf{C},\, |z| \leq 2R\}$ $(R > 0)$.

Supposons que la fonction K soit minorée par une constante positive c sur une partie de ce disque, mettons sur $D_R \;:= \{z \in \mathbf{C},\, |z| \leq R\}$. Soient $p = 0 \in D_R$ et $q = z \in D_R$ avec $|z| = R$. Puisque $g \geq g_1$, la distance relativement à g entre p et q est au moins R. Mais une géodésique minimisante (pour g) entre ces deux points reste au moins le temps R dans le disque D_R (toujours puisque $g \geq g_1$). Donc par Bonnet-Myers, $cR^2 \leq \pi$. Si c est trop grande, on obtient une contradiction.

L'exemple de l'énoncé est une conséquence directe de cette remarque. ∎

Dans le même esprit (i.e. K ne peut pas être “trop positive”), on peut modifier les estimations de [KW] (voir également [AMcO] et [J]) pour obtenir l'obstruction suivante.

3.3 Proposition : *Soient $(S, \partial S)$ une surface de Riemann connexe, compacte à bord, munie d'un diviseur $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i\, p_i + \sum_{j=1}^m (-1)\, q_j$, et $K : \mathring{S} \setminus \operatorname{supp}\beta \to \mathbf{R}$ lisse, bornée au voisinage de ∂S.*

On suppose qu'il existe une métrique conforme g sur S de courbure K, telle que :

i) g représente β, avec des singularités normales en les p_i, et conformément quasi-isométriques à la pseudo-sphère en les q_j;

ii) chaque bout (hyperbolique) de (S,g) est conformément quasi-isométrique au bout du disque de Poincaré.

Soit g_0 une métrique conforme sur $(S,\partial S)$ (i.e. lisse jusqu'au bord), de courbure $K_0 \leq 0$, et représentant normalement un diviseur $\beta^0 = \sum_{i=1}^n \beta_i^0 p_i + \sum_{j=1}^m \beta_j^0\, q_j$. Si pour tout i, $\beta_i^0 \geq \beta_i$, et pour tout j, $\beta_j^0 > -1$, alors on a

$$\int_S K\, dA_0 \;\leq 0.$$

Remarques : Si $\partial S \neq \emptyset$, ou si $\operatorname{supp}\beta \neq \emptyset$, l'inégalité est stricte.

On peut affaiblir les hypothèses (comportement de K aux bouts hyperboliques et type de quasi-isométrie des singularités) : voir la preuve.

Preuve : On remarque d'abord que l'intégrale $\int_S K\, dA_0$ est convergente.

On écrit $g = \mathrm{e}^{2v} g_0$, avec $\Delta_0 v = K\,\mathrm{e}^{2v} - K_0$, et l'on note V_ϵ le complémentaire du ϵ-voisinage (pour une métrique lisse sur $(S,\partial S)$) de $\partial S \cup \operatorname{supp}\beta$. La formule de Green donne

$$\int_{V_\epsilon} K\, dA_0 = \int_{V_\epsilon} \Delta_0 v\, \mathrm{e}^{-2v}\, dA_0 + \int_{V_\epsilon} K_0\, \mathrm{e}^{-2v}\, dA_0$$

$$= \int_{V_\epsilon} -2|\nabla^0 v|^2\, \mathrm{e}^{-2v}\, dA_0 + \int_{V_\epsilon} K_0\, \mathrm{e}^{-2v}\, dA_0 + \int_{\partial V_\epsilon} \mathrm{e}^{-2v} \frac{\partial v}{\partial n_0}\, d\sigma_0,$$

où dA_0 et $d\sigma_0$ sont respectivement les éléments d'aire et de longueur associés à g_0, et n_0 est la normale unitaire. Les deux premiers termes de cette expression sont négatifs, il reste à évaluer le second pour de petites valeurs de ϵ, en remarquant que $\mathrm{e}^{-2v}\dfrac{\partial v}{\partial n_0} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial n_0}(\mathrm{e}^{-2v})$.

Au voisinage d'un bout hyperbolique de S, paramétré en carte conforme par $\{z,\, 1 < |z| \leq \rho\}$, on a par hypothèse :

$$g = \frac{\mathrm{e}^{2u}|dz|^2}{(1-|z|)^2}, \quad g_0 = \mathrm{e}^{2u_0}|dz|^2, \quad \text{soit} \quad \mathrm{e}^{-2v} = \mathrm{e}^{2(u_0-u)}\,(1-|z|)^2$$

avec u et u_0 bornées. On définit pour t petit :

$$S_t = \{z,\, |z| = 1-t\}, \qquad I(t) = \int_{S_t} \frac{\partial}{\partial n_0}(\mathrm{e}^{-2v})\, d\sigma_0 = \int_{S_t} \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{e}^{-2v})|dz|,$$

et l'on estime

$$J(r) = \int_{r/2}^{r} I(t)\, dt = \int_0^{2\pi}\int_{r/2}^{r} \frac{\partial(\mathrm{e}^{-2v})}{\partial t}\, t\, dt\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left((1-r)\,\mathrm{e}^{-2v}(r,\theta) - (1-\frac{r}{2})\,\mathrm{e}^{-2v}(r/2,\theta) + \int_{r/2}^{r}\mathrm{e}^{-2v}(t,\theta)\, dt\right) d\theta,$$

après intégration par parties. On obtient donc

$$|J(r)| = \mathrm{O}\left(r^2\right),$$

ce qui assure, puisque I dépend continûment de t, l'existence d'une suite ϵ_n avec $I(\epsilon_n) \to 0$.

Le raisonnement est semblable lorsqu'on travaille au voisinage d'un cusp q_j.

Si l'on travaille maintenant au voisinage d'une singularité normale p_i, le résultat découle simplement de l'injection de Sobolev $W^{2,p} \subset L^\infty$ $(p > 1)$. ∎

4. SURFACES AVEC AU MOINS UN BOUT HYPERBOLIQUE

Soit S une surface de Riemann ouverte, connexe de type fini, n'ayant que des bouts hyperboliques. Par le théorème d'uniformisation, il existe une surface de Riemann compacte Σ telle que $S \subset \Sigma$ et $\Sigma \setminus S$ est une union finie de disques. On associe ainsi à S une surface compacte à bord lisse $(S, \partial S)$ que l'on munit d'une métrique de référence g_0 conforme lisse (on verra en 4.3-i que le choix de g_0 est sans importance). Notons G l'opérateur de Green de $(S, \partial S, g_0)$ pour le problème de Dirichlet. On a le :

4.1 Théorème : *Soient β un diviseur sur S et $K : S\backslash \mathrm{supp}\beta \to \mathbf{R}$ localement Hölder continue. On décompose $K = K_1 + k$ avec $K_1 \leq 0$ et $k \geq 0$ régulières.*
On suppose que :
i) il existe une métrique conforme $g_1 = \rho\, g_0$ de courbure K_1 sur S qui représente β ;
ii) pour un exposant $p > 1$, $k\rho \in L^p(S, g_0)$.
Alors, si

$$\| G(k\rho) \|_\infty \leq 1/(2\mathrm{e}), \qquad (*)$$

il existe une métrique conforme g sur S de courbure K, conformément quasi-isométrique à g_1 et qui représente β. En particulier g est complète si g_1 l'est.

4.2 *Remarques :* i) A partir du moment où l'on sait que $k\rho \in L^p$ pour un exposant $p > 1$, la condition (*), qui ne fait pas intervenir p, assure l'existence de la métrique cherchée. Mais le principe de concentration compacité ([T3]) interdit de traiter par troncature sans précautions le cas où $k\rho \in L^1$: d'une suite de métriques résolvant le problème approché pourraient se détacher des "bulles" de courbure positive.

ii) La preuve du théorème montre que $g_1/g \to 1$ lorsque s'on se rapproche de ∂S (i.e. des bouts de S). La preuve montre également que, pour $\| G(k\rho) \|_\infty$ petite, la métrique que l'on construit est proche de g_1 ; il n'y a pas en général unicité d'une telle métrique.

4.3 *Remarques :* i) La condition (*) est insensible au choix de la métrique de référence g_0 ; elle peut également s'exprimer en demandant que l'unique solution $u \in W^{2,p}$ de l'équation

$$\Delta_1 u = k \quad \text{sur} \quad S, \qquad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial S$$

vérifie $\| u \|_\infty \leq 1/(2\mathrm{e})$.

Cette condition est également insensible à une homothétie sur K.

ii) La condition (*) peut être appréhendée comme une condition *intégrale* sur $k\rho$. On a en effet

$$\| G(k\rho) \|_\infty \leq c_p \| G(k\rho) \|_{2,p} \leq c_p \| G \|_{(p)} \| k\rho \|_p,$$

où c_p est la constante de Sobolev du plongement $W^{2,p} \subset L^\infty$ et $\| G \|_{(p)}$ la norme de l'opérateur de Green $G \ : L^p(S, g_0) \to W^{2,p}(S, g_0)$. Cependant, cette formulation a le désavantage de faire intervenir la métrique g_0 de référence, et l'exposant p (alors que $c_p \to \infty$ lorsque $p \to 1$).

Pour les applications, le cas où la fonction courbure prescrite est pincée négative à l'infini est important : soit S' une surface de Riemann non compacte, connexe de type fini, avec au moins un bout hyperbolique. On ajoute un point idéal q_i $(1 \leq i \leq n)$ à chaque bout parabolique de S' pour obtenir une surface ouverte de type hyperbolique $S = S' \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{q_i\}$, que l'on réalise (comme ci-dessus) comme une surface compacte à bord lisse munie d'une métrique lisse conforme g_0. On note encore G l'opérateur de Green de $(S, \partial S, g_0)$.

4.4 Corollaire : *Soit $K : S' \to \mathbf{R}$ localement Hölder continue. On décom–pose $K = K_1 + k$ avec $K_1 \leq 0$, $k \geq 0$ régulières. On suppose que*

$$-a^2 \leq K_1 \leq -b^2 < 0 \quad \textit{hors d'un compact de } S',$$

et l'on note $g_1 = \rho\, g_0$ l'unique métrique complète conforme de courbure K_1 sur S'. Alors si

$$k\rho \in L^p(S, g_0)\ (p > 1) \quad \textit{et si} \quad \| G(k\rho) \|_\infty \leq 1/(2\mathrm{e}),$$

il existe une métrique conforme g de courbure K, quasi-isométrique à g_1 ; en particulier g est complète.

Preuve : Travailler sur la variété hyperbolique S munie du diviseur $\beta = \sum_{i=1}^n (-1)\, q_i$. L'existence et l'unicité de g_1 sont assurées par 1.6 et g_1 représente β ; le théorème 4.1 s'applique donc. ∎

4.5 *Remarque :* Lorsque k est nulle en dehors d'un compact de S', la condition $k\rho \in L^p$ est automatiquement satisfaite.

Preuve de 4.1 : On travaille par déformation conforme, à partir de la métrique g_1 et l'on cherche g sous la forme $g = \mathrm{e}^{2u} g_1$, avec $\Delta_1 u = K\mathrm{e}^{2u} - K_1$, ou plutôt

$$\Delta_0 u = K\rho\, \mathrm{e}^{2u} - K_1 \rho \tag{E}$$

au sens faible sur S, et u bornée.

4.6 On va résoudre (E) par la méthode des sur- et sous-solutions.

En s'appuyant sur le lemme de Schwarz (3.1), on va en fait chercher une sur-solution positive pour (E), puisque $u_- \equiv 0$ (ou toute constante négative) est une sous-solution. Pour cela, on va résoudre le problème de Dirichlet non linéaire suivant sur $(S, \partial S)$:

$$\Delta_0 u = k\rho\, \mathrm{e}^{2u} \quad \text{sur } S, \qquad u = 0 \quad \text{sur } \partial S, \tag{D}$$

en remarquant que, si $u \in W^{2,p}$ est solution de (D),

(i) par le principe du maximum, $u \geq 0$;

(ii) $\Delta_0 u = k\rho\, \mathrm{e}^{2u} \geq (K_1 + k)\, \rho\, \mathrm{e}^{2u} - K_1\rho$, puisque $u \geq 0$ et $K_1 \leq 0$,

donc u est une sur-solution positive pour (E).

4.7 *Problème de Dirichlet linéaire :*

Pour $p > 1$, on note $G\ : L^p(S, g_0) \to W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(S, g_0)$ l'opérateur de Green de $(S, \partial S, g_0)$: pour $f \in L^p$, $G(f)$ est l'unique solution dans $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$ de l'équation $\Delta_0 u = f$ sur S ; de plus $G(f) \in C^0(\bar{S})$ (voir [GT] 9.15, 9.18). Par le principe du maximum, on a $G(f) \geq 0$ dès que $f \geq 0$.

Dans la suite, on s'appuiera sur les résultats classiques suivants.

4.8 Proposition : (Sobolev, Kondrachov, voir [GT] 7.26). *Pour $p > 1$, on a une injection continue $W^{2,p} \subset W^{1,2}$ et une injection compacte $W^{2,p} \subset C^0(\bar{S})$.*

4.9 Proposition : (Point fixe de Schauder, voir [GT] 11.2). *Soient $\mathcal{B}$ un espace de Banach, $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ un convexe fermé, et $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ une application continue pour laquelle $T(\mathcal{C})$ est relativement compacte. Alors T admet un point fixe.*

4.10 *Résolution du problème de Dirichlet non linéaire (D) :*

On note $f = k\rho$ (avec $f \geq 0$ et $f \in L^p$), et l'on veut résoudre

$$\Delta_0 u = f\, \mathrm{e}^{2u} \quad \text{sur } S, \qquad u = 0 \text{ sur } \partial S.$$

4.11 Proposition : *Pour $v \in W^{2,p}$, on définit $T(v) = G(f\, \mathrm{e}^{2v})$.*

i) L'opérateur $T : W^{2,p} \to W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$ est croissant.

Pour $\alpha, \delta > 0$, on note $\mathcal{C}_\alpha^\delta = \{v \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}, \| v \|_\infty \leq \alpha, \| v \|_{2,p} \leq \delta\}$.

ii) Alors $\mathcal{C}_\alpha^\delta$ est un convexe fermé de $W^{2,p}$, et $T(\mathcal{C}_\alpha^\delta) \subset W^{2,p}$ est relativement compact.

iii) De plus si $\| Gf \|_\infty < 1/(2\mathrm{e})$, alors pour δ assez grand, $T(\mathcal{C}_{1/2}^\delta) \subset \mathcal{C}_{1/2}^\delta$.

De cette proposition, on tire le:

4.12 Corollaire : *Pour $\| G(k\rho) \|_\infty \leq 1/(2\,\mathrm{e})$ l'application $T : W^{2,p} \to W^{2,p}$ admet un point fixe.*

Preuve de 4.11 : i) Puisque $f \geq 0$, cette assertion découle du principe du maximum généralisé.

ii) Par 4.8, $\mathcal{C}_\alpha^\delta$ est fermé (et borné), et l'application T est compacte.

iii) Si $\| v \| \leq \alpha$, on a par (i) (monotonie) :

$$0 \leq T(v) \leq T(\alpha) = G(f\, \mathrm{e}^{2\alpha}) = \mathrm{e}^{2\alpha} G(f),$$

donc $\| T(v) \|_\infty \leq \mathrm{e}^{2\alpha} \| G(f) \|_\infty$. On cherche à assurer l'inégalité $\mathrm{e}^{2\alpha} \leq \alpha / (\| G(f) \|_\infty)$; ce sera possible dès que $2 \| G(f) \|_\infty \leq 1/\mathrm{e}$.

On fixe alors α. En notant $\| G \|_{(p)}$ la norme d'opérateur de $G : L^p \to W^{2,p}$, on a pour tout $v \in \mathcal{C}_\alpha^\delta$:

$$\| T(v) \|_{2,p} = \| G(f\, \mathrm{e}^{2v}) \|_{2,p} \leq \| G \|_{(p)} \| f\, \mathrm{e}^{2v} \|_p \leq \| G \|_{(p)} \| f \|_p\, \mathrm{e}^{2\alpha} \leq \delta$$

dès que δ est choisi assez grand. ■

4.13 *Construction de la métrique.*

Avec les notations précédentes, on suppose que $\| G(k\rho) \|_\infty \leq 1/(2\,\mathrm{e})$ et l'on note u_+ le point fixe pour T construit en 4.12. On a $T(u_+) = G(f\,\mathrm{e}^{2u_+}) = u_+$, c'est-à-dire,

$$\Delta_0(u_+) = f\mathrm{e}^{2u_+} = k\rho\,\mathrm{e}^{2u_+}.$$

Par 4.6, $u_+ \in W^{1,2} \cap C^0(S)$ est une sur-solution positive pour (E) ; la méthode des sur et sous-solutions s'applique donc et fournit une solution forte $u \in C^2(S \setminus \mathrm{supp}\beta)$ de l'équation

$$\Delta_0 u = K\rho\,\mathrm{e}^{2u} - K_1\rho$$

avec $0 \leq u \leq u_+$, donc u bornée.

La métrique conforme $g = \mathrm{e}^{2u} g_1$ est donc conformément quasi-isométrique à g_1 et de courbure K ; de plus, au voisinage de $\mathrm{supp}\beta$, g est à courbure totale finie (car $K\rho \in L^1_{loc}(S)$ et u est bornée). Le lemme 1.5 montre que g représente β, comme g_1.■

5. DEUX EXEMPLES

Dans cette section, nous illustrons sur des exemples simples les résultats obtenus en 4.

5.1 Exemple : *Soient (S, h) une surface de Riemann connexe de type fini avec au moins un bout hyperbolique, munie de sa métrique hyperbolique h, et $m \in S$.*

Pour tous $p > 1$ et $r_0 > 0$, il existe une constante $A_p = A(p, m, r_0)$ telle que, si $c > 0$ et $r > 0$ vérifient

$$0 \leq r \leq r_0\,, \qquad \text{et} \quad c\,r^{2/p} \leq A_p\,,$$

alors toute fonction lisse $K : S \to \mathbf{R}$ satisfaisant

$$K \equiv -1 \text{ hors de } B(m,r) \quad \text{et} \quad K \leq c \text{ sur } B(m,r)\,,$$

est courbure d'une métrique conforme complète sur S.

Preuve : Soient g_0 une métrique conforme lisse sur le compactifié $(S, \partial S)$, et $g_1 = \rho g_0$ l'unique métrique conforme complète (de classe $C^{1,1}$) sur S, de courbure K_1 définie par

$$K_1 \equiv -1 \quad \text{hors de} \quad B(m, r_0) \quad \text{et} \quad K \equiv 0 \quad \text{sur} \quad B(m, r_0)\,.$$

Pour $0 < r < r_0$, on définit

$$k_r = c\,\mathbf{1}_{B(m,r)} \qquad \text{et} \qquad K_r = K_1 + k_r\,.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \| k_r\,\rho \|_p &= c\biggl(\int_{B(m,r)} \rho^p\,dA_0\biggr)^{1/p} \\ &\leq c \sup_{B(m,r_0)} |\rho| \,\Bigl(\mathrm{vol}_{g_0} B(m,r)\Bigr)^{1/p}\,, \end{aligned}$$

le théorème 4.1 (voir 4.3 ii) assure l'existence d'une métrique conforme complète g_r, de courbure K_r, dès que $c\, r^{2/p}$ est "assez petit", i.e. inférieur à une constante qui ne dépend que de p, m et r_0.

Revenons à la fonction K de l'énoncé ; par compacité, il existe $a \geq 1$ avec $-a^2 \leq K$ partout. Notons h_a l'unique métrique conforme complète de courbure $-a^2$ sur S. Le lemme de Schwarz 3.1 assure que $h_a \leq g_r$.

Puisque de plus $-a^2 \leq K \leq K_r$, le méthode des sur- et sous-solutions (2.1) assure l'existence d'une métrique conforme g sur S, de courbure K avec $h_a \leq g \leq g_r$, donc complète. ∎

Dans le second exemple, nous montrons comment prescrire de la courbure positive dans un cusp ou un bout hyperbolique.

5.2 Exemple : *On travaille sur le disque pointé* $D' = \{z \in \mathbf{C},\ 0 < |z| < 1\}$. *Pour* $a > 0,\ \lambda > 0$, *on considère le secteur*

$$\begin{aligned}\Sigma_{a,\lambda} = \{z = r\mathrm{e}^{i\theta}, \qquad & \textit{avec} \quad 0 < r < 1, \\ & |\theta| \leq \lambda r^a \ (0 < r < 1/2), \quad |\theta| \leq \lambda(1-r)^a \ (1/2 < r < 1)\},\end{aligned}$$

et la fonction $K = K_{a,\lambda} : D' \to \mathbf{R}$ *définie par* $K = -1$ *hors de* $\Sigma_{a,\lambda}$ *et* $K = +1$ *sur* $\Sigma_{a,\lambda}$.

Pour tout $a > 1$ *fixé, si* λ *est assez petit, il existe une métrique conforme* g *de courbure* K *sur* D', *qui est asymptotique à la métrique hyperbolique de* D' *lorsque* $z \to 0$ *et* $|z| \to 1$. *En particulier,* g *est complète.*

Preuve : On part de la métrique hyperbolique de D', soit $g_1 = |dz|^2/(|z \log|z||)^2 = \rho|dz|^2$, et l'on écrit $K = K_1 + k$ (avec $k = 2\mathbf{1}_\Sigma$). Le théorème 4.1 permet de conclure si $k\rho \in L^p$ pour un exposant $p > 1$, et si $\| G(k\rho) \|_\infty$ – ou plutôt (voir 4.2v) si $\| k\rho \|_p$ est assez petite (G est l'opérateur de Green du disque pour le problème de Dirichlet).

On a

$$\| k\rho \|_p^p = \lambda \,\mathrm{cste}\, \Big\{\int_0^{1/2} r^{a-2p} |\log r|^{-2p} dr + \int_{1/2}^1 (1-r)^a \, |\log r|^{-2p} \, r^{-2p} \, dr\Big\} = \lambda I_p.$$

La quantité I_p est finie dès que $a - 2p > -1$. Pour $a > 1$, on trouvera donc $p \in]1, (a+1)/2[$ avec I_p fini. On conclue en choisissant λ assez petit. ∎

6. SURFACES COMPACTES, OU DE TYPE PARABOLIQUE

Dans cette section, S est une surface de Riemann compacte connexe munie d'un diviseur β tel que $\chi(S, \beta) < 0$, et d'une métrique lisse conforme de référence g_0. On se donne $K : S \setminus \mathrm{supp}\beta \to \mathbf{R}$ localement Hölder continue, qui change de signe, et l'on cherche une métrique conforme sur S de courbure K, qui représente le diviseur β.

On décompose $K = K_1 + k$, avec K_1 et k régulières, $K_1 \leq 0$ et $k \geq 0$.

On écrit $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i \, p_i \, + \, \sum_{j=1}^m (-1) \, q_j$, et l'on suppose que :

i) au voisinage de chaque p_i $\quad (K_1(z)|z - p_i|^{2\beta_i}),\ (k(z)|z - p_i|^{2\beta_i}) \in L^p(S, g_0)$ pour un exposant $p > 1$;

ii) au voisinage de chaque q_j $\quad -a^2 \leq K_1 \leq -b^2 < 0$, et $k \equiv 0$,

et l'on note $g_1 = \rho \, g_0$ l'unique métrique conforme sur S, de courbure K_1 qui représente β (1.6) ; cette métrique est complète en chaque q_j. On introduit la variété $S' = S \setminus \{q_1, \cdots, q_m\}$.

On note $P\ : W^{2,p}(S,g_0) \to L^1(S,g_0)$ l'opérateur défini par

$$P(u) = \Delta_0 u - 2\,(K_1\rho)u.$$

On notera (abusivement) $P^{-1}(k\rho)$ l'unique solution $u \in W^{2,p}_{loc}(S',g_0) \cap L^\infty$ de l'équation

$$P(u) \equiv \Delta_0 u - 2\,(K_1\rho)u = k\rho$$

au sens faible sur S.

6.1 Théorème : *On pose $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S,\beta) = 1 - 4\pi\chi(S,\beta)$, et $x(\mathcal{A})$ l'unique solution de l'équation $x\mathrm{e}^x = 1/(2+\mathcal{A})$. Si*

$$\| P^{-1}(k\rho) \|_\infty \ + \int k\,dA_1 \ < x(\mathcal{A})/(4\mathcal{A}) \tag{$**$}$$

il existe une métrique conforme de courbure K sur S, qui représente le diviseur β et est conformément quasi-isométrique à g_1.

Remarque : La condition (**) qui porte sur K est de nouveau insensible aux homothéties sur K, et au choix de la métrique g_0. L'opérateur P qui intervient dans l'énoncé est *linéaire*.

Lorsqu'on travaille sur une surface compacte lisse (i.e. lorsque $\beta = 0$), on retrouve – à la valeur de la constante près – un résultat obtenu pour $p > 2$ par Kazdan et Warner :

6.2 Corollaire : ([KW] 10.5.d) *Soit S une surface de Riemann compacte avec $\chi(S) < 0$, munie de l'unique métrique conforme g_1 de courbure -1. Il existe une constante $c = c(p,S) > 0$ telle que, si $K = -1 + k$, où $k \in L^p(S)$ pour un exposant $p > 1$ avec*

$$\| k \|_{g_1,p} \leq \ c(p,S)\,,$$

alors il existe une métrique conforme g, de courbure K sur S.

Preuve : On cherche g sous la forme $g = \mathrm{e}^{2u}g_1$, avec

$$\Delta_1 u = (-1+k)\mathrm{e}^{2u} + 1.$$

L'opérateur (injectif) P associé à cette équation est

$$P(u) \equiv \Delta_1 u + 2u.$$

Comme dans [KW] 3.12 (voir aussi 6.4), il existe une constante $\gamma = \gamma(p,S)$ telle que, pour tout $u \in W^{2,p}$, $\| u \|_\infty \leq \gamma \| P(u) \|_p$. Donc

$$\| k \|_{g_1,1} + \| P^{-1}(k) \|_\infty \leq \| k \|_{g_1,p} \left\{ |\chi(S)|^{1-1/p} \ + \gamma \right\}$$

par l'inégalité de Hölder et la formule de Gauss-Bonnet, d'où le résultat. ■

La démonstration de 6.1 va être effectuée en deux étapes.

PREMIERE ETAPE.

On suppose ici que $\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i\, p_i$, et donc que $S = S'$ et $k\rho \in L^p(S)$ pour un exposant $p > 1$.

6.3 *Méthode de perturbation.*
On cherche notre métrique sous la forme $g = \mathrm{e}^{2u}g_1$, avec u solution faible sur S de

$$\Delta_0 u = K\rho\,\mathrm{e}^{2u} - K_1\rho\,. \tag{E}$$

Notons, pour $t \geq 0$, $h_t = (K_1 + tk)\rho$, avec $h_0 = K_1\rho$ et $h_+ = k\rho$. Ces fonctions sont localement Hölder continues sur $S \setminus \mathrm{supp}\beta$ et appartiennent à L^p.

Le résultat va être obtenu par la méthode de perturbation ([Be] Appendice. 43). Pour $0 \leq t \leq 1$, on va chercher à résoudre l'équation

$$\Delta_0 u_t = h_t\, \mathrm{e}^{2u_t} - h_0, \qquad (E_t)$$

sachant que pour $t = 0$, $u_0 = 0$ est solution de (E_0).

On introduit l'application $F : \mathbf{R} \times W^{2,p}(S, g_0) \to L^p(S, g_0)$ définie par $F(t, u) = \Delta_0 u - h_t e^{2u} + h_0$, et l'on cherche à appliquer le théorème d'inversion locale à $H = (\mathrm{Id}, F) : \mathbf{R} \times W^{2,p}(S, g_0) \to \mathbf{R} \times L^p(S, g_0)$ au voisinage de $(0, 0) \in \mathbf{R} \times W^{2,p}$. On obtiendra ainsi, pour $t > 0$ "assez petit", une (unique petite) solution de (E_t).

Cette démarche est rendue possible par le résultat suivant.

6.4 Proposition : *Pour $F : \mathbf{R} \times W^{2,p}(S, g_0) \to L^p(S, g_0)$ définie ci-dessus,*

i) F est lisse ;

ii) $u_0 = 0$ est solution de $F(0, u_0) = 0$;

iii) la linéarisée de F en u_0 est elliptique ; on la notera $P : W^{2,p} \to L^p$, avec $P(v) = \Delta_0 v - 2h_0 v$;

iv) pour toute $f \in L^p$, l'équation $P(v) = f$ admet une unique solution $v \in W^{2,p}$.

Preuve : Les trois premiers points sont clairs.

(iv) Soit $v \in W^{2,p}$ telle que $P(v) \equiv \Delta_0 v - 2h_0 v = 0$. Puisqu'on a des injections continues $W^{2,p} \subset W^{1,2}$ et $W^{2,p} \subset L^\infty$, on peut écrire :

$$0 = \int_S v P(v)\, dA_0 = \int_S v \Delta_0 v - 2h_0 v^2\, dA_0 = \int_S |\nabla v|^2 - 2h_0 v^2\, dA_0 \geq 0\,,$$

donc v est constante, puis nulle. Ainsi P est injectif.

Puisque P est elliptique et injectif, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour $v \in W^{2,p}$,

$$\| v \|_{2,p} \leq c \, \| P(v) \|_p$$

(voir par exemple [Be], Appendice.29). On démontre alors la surjectivité de P comme dans [KW] 3.13. ∎

On se fixe alors une norme N sur $W^{2,p}$ (que l'on précisera en 6.8), compatible avec sa topologie. La preuve du théorème d'inversion locale donne le résultat suivant.

6.5 Proposition : *On note $A = DH_{(0,0)} : \mathbf{R} \times W^{2,p} \to \mathbf{R} \times L^p$ et $\tilde{H} = A^{-1} \circ H : \mathbf{R} \times W^{2,p} \times \mathbf{R} \times W^{2,p}$.*

i) Il existe une boule $\mathcal{B}'$ centrée en l'origine dans $\mathbf{R} \times W^{2,p}$ sur laquelle $N\big(D\tilde{H} - \mathrm{Id}\big) < 1/2$. On notera $\mathcal{B} = \{x \,/\, 2x \in \mathcal{B}'\}$.

ii) Soit $t > 0$; si $\big(t, tP^{-1}(h^+)\big) \in \mathcal{B} \subset \mathbf{R} \times W^{2,p}$, alors il existe une solution u_t à l'équation (E_t) de courbure prescrite.

Preuve : i) Par construction, $D\tilde{H}_{(0,0)} = \mathrm{Id}$, d'où l'assertion par continuité.

ii) La preuve du théorème d'inversion locale montre que si $z = (t, 0) \in A(\mathcal{B}) \subset \mathbf{R} \times L^p$, alors il existe un (unique petit) $(s_t, u_t) \in \mathbf{R} \times W^{2,p}$ pour lequel $H(s_t, u_t) = (t, 0)$, i.e. $s_t = t$ et $F(t, u_t) = 0$. ∎

6.6 *Calcul de $D\tilde{H}$:*

Puisque $A(s,v) = \big(s, P(v) - sh^+\big)$, on a $\tilde{H}(t,u) = \big(t, P^{-1}\big(F(t,u) + th^+\big)\big)$. On obtient donc, avec $F(t,u) = \Delta_0 u - (h_0 + th^+)\,\mathrm{e}^{2u} + h_0$,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -h^+\,\mathrm{e}^{2u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial u} \cdot v = \Delta_0 v - 2v\,h_t\,\mathrm{e}^{2u},$$

puis, en différentiant et en regroupant les termes,

$$\big(D\tilde{H} - \mathrm{Id}\big)_{(t,u)} \cdot (s,v) = \Big(0, P^{-1}\big(2h_0(1-\mathrm{e}^{2u})v - 2\,th^+\mathrm{e}^{2u}v + sh^+(1-\mathrm{e}^{2u})\big)\Big).$$

En particulier :

$$\begin{aligned} N\big((D\tilde{H} - \mathrm{Id})_{(t,u)} \cdot (s,v)\big) &\le |s|\, N\big(P^{-1}\big(h^+(1-\mathrm{e}^{2u})\big)\big) \\ &\quad + 2\,N\big(P^{-1}\big(th^+\mathrm{e}^{2u}v\big)\big) + 2\,N\big(P^{-1}\big(h_0\,v(1-\mathrm{e}^{2u})\big)\big). \end{aligned} \tag{6.7}$$

6.8 *Estimations :*
Pour estimer le membre de droite dans (6.7), on utilisera le lemme suivant.

6.9 Lemme : *Pour l'opérateur P défini en 6.4 (avec $h_0 \le 0$) :*
(i) $P^{-1}(h_0) = -1/2$;
ii) pour $v, \bar{v} \in W^{2,p}$, on a $\big(P(v) \le P(\bar{v})\big) \Longrightarrow \big(v \le \bar{v}\big)$, autrement dit, P^{-1} est un opérateur positif.

Preuve : i) est clair.
ii) On note $P(v) = w$ et $P(\bar{v}) = \bar{w}$. On a alors

$$\Delta_0(v - \bar{v}) - 2h_0(v - \bar{v}) = w - \bar{w} \le 0$$

par hypothèse. Le principe du maximum de E. Hopf assure donc que $v - \bar{v}$ n'a pas de maximum positif.
On en déduit que, pour $|w| \le \bar{w}$, $|P^{-1}(w)| \le |P^{-1}(\bar{w})|$. ■

Ce lemme d'estimation ponctuelle incite à munir $W^{2,p}$ de la norme définie par

$$N(u) = \parallel \Delta_0 u \parallel_p + \parallel u \parallel_\infty$$

qui par le plongement de Sobolev est équivalente à la norme usuelle, mais qui contrôle directement la norme uniforme.

6.10 En remarquant que, pour $\varphi \in L^p$:

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= \parallel \Delta_0(P^{-1}(\varphi)) \parallel_p + \parallel P^{-1}(\varphi) \parallel_\infty \\ &\le \parallel \varphi \parallel_p + 2 \parallel h_0\, P^{-1}(\varphi) \parallel_p + \parallel P^{-1}(\varphi) \parallel_\infty \\ &\le \big(1 + 2 \parallel h_0 \parallel_p\big)\big(\parallel \varphi \parallel_p + \parallel P^{-1}(\varphi) \parallel_\infty\big), \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme de monotonie 6.9, on obtient les estimations suivantes :
(i) $N\big(P^{-1}\big(h^+(1-\mathrm{e}^{2u})\big)\big) \le \mathrm{e}^{2N(u)}\big(1 + 2 \parallel h_0 \parallel_p\big)\big\{\parallel h^+ \parallel_p + \parallel P^{-1}(h^+) \parallel_\infty\big\}$,
(ii) $N\big(P^{-1}\big(th^+\,\mathrm{e}^{2u}v\big)\big)$
$\le \mathrm{e}^{2N(u)}\big(1 + 2 \parallel h_0 \parallel_p\big)\big\{\parallel th^+ \parallel_p + \parallel P^{-1}(th^+) \parallel_\infty\big\}\, N(v)$
(iii) $N\big(P^{-1}\big(h_0\,v(1-\mathrm{e}^{2u})\big)\big) \le 2 \parallel u \parallel_\infty \mathrm{e}^{2\|u\|_\infty}\{1 + 2 \parallel h_0 \parallel_p\}\, N(v)$.

On pose

$$A_p(h_0) = 1 + 2 \parallel h_0 \parallel_p \quad \text{et} \quad B_p(h^+) = \parallel h^+ \parallel_p + \parallel P^{-1}(h^+) \parallel_\infty .$$

La boule $\mathcal{B}' \subset \mathbf{R}\times W^{2,p}$ cherchée, sur laquelle $N\big(D\tilde{H}-\mathrm{Id}\big) < 1/2$ sera définie par $\mathcal{B}' = \{(t,u),\ |t| < \tau\ ,\ N(u) < \alpha\}$, où τ et α satisfont

$$\mathrm{e}^{2\alpha} A_p(h_0)\, B_p(h_0)\ < 1/2 \qquad \text{et} \tag{1}$$

$$\mathrm{e}^{2\alpha} A_p(h_0)\, B_p(\tau h^+)\ +\ 2\alpha \mathrm{e}^{2\alpha} A_p(h_0) < 1/4. \tag{2}$$

En utilisant de nouveau la majoration

$$N\big(P^{-1}(th^+)\big) \leq A_p(h_0)\, B_p(th^+)\,,$$

la proposition 6.5 assure l'existence d'une solution pour (E_t), i.e. d'une métrique conforme de courbure (K_1+tk), dès qu'il existe un couple (τ,α) pour lequel :
- (1) et (2) sont satisfaites,
- $0 \leq t \leq \tau/2$, et $N\big(P^{-1}(th^+)\big) \leq A_p(h_0)\, B_p(th^+) \leq \alpha/2$.

Par monotonie des conditions (1) et (2) vis à vis des arguments, ce sera le cas dès que

$$A_p(h_0) B_p(h^+)\, \mathrm{e}^{4A_p(h_0)B_p(th^+)} < 1/2\,, \quad \text{et} \tag{1'}$$

$$4A_p(h_0)B_p(th^+)\, \mathrm{e}^{4A_p(h_0)B_p(th^+)}\, (1+2A_p(h_0)) < 1/2. \tag{2'}$$

Si la seconde condition est satisfaite par $th^+ = tk\rho$, on peut supposer – quitte à faire subir une homothétie à k, que l'on rattrappe sur t par homogénéité – que la première est aussi satisfaite.

Revenons à l'hypothèse de l'énoncé. Puisque $h_0, h^+ \in L^p(S,g_0)$ pour $p>1$ et que la variété est compacte, on a $h_0, h^+ \in L^1(S,g_0)$, et

$$\lim_{p\to 1} \parallel h_0 \parallel_p = \parallel h_0 \parallel_1 = -2\pi\chi(S,\beta)$$

(formule de Gauss-Bonnet généralisée, voir 1.2 ii ou [HT1] 2.8 pour une preuve), donc

$$\lim_{p\to 1} A_p(h_0) = 1 + 2 \parallel h_0 \parallel_1 = 1 - 4\pi\chi(S,\beta),$$

$$\text{et} \quad \lim_{p\to 1} B_p(h^+) = \parallel h^+ \parallel_1 + \parallel P^{-1}(h^+) \parallel_\infty .$$

Si la condition (**) de l'énoncé est satisfaite, l'inégalité $(2')$ ci-dessus le sera également pour $p>1$ assez proche de 1, ce qui achève la démonstration de la première étape.

SECONDE ETAPE.

On revient aux hypothèses générales du théorème 6.1. La difficulté supplé–mentaire viendra de ce que $K_1\rho \in L^1$, mais n'appartient à aucun L^p pour $p>1$. On va procéder par troncature. Rappelons que $S' = S \setminus \{q_1, \cdots q_m\}$.

On note (φ_n) une suite *croissante* de fonctions-test sur S', avec $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n \equiv 0$ sur chaque boule $B_{g_0}(q_j, 1/2^{n+1})$, $\varphi_n \equiv 1$ hors de $\bigcup B_{g_0}(q_j, 1/2^n)$, et l'on suppose que $\{x,\ k(x) > 0\} \subset \{x,\ \varphi_n(x) = 1\}$ (n assez grand).

6.11 Lemme : *Soit $u_n \in W^{2,p}(S,g_0)$ l'unique solution de*

$$\Delta_0 u_n - 2\,(K_1\varphi_n\rho)\, u_n = k\rho \tag{e_n}$$

au sens faible sur S. La suite (u_n) est décroissante positive sur S et converge uniformément sur les compacts de S' vers $u \in L^\infty \cap W^{2,p}_{loc}(S')$, qui est l'unique solution bornée de

$$\Delta_0 u - 2\,(K_1 \rho)\, u = k\rho \tag{e}$$

au sens faible sur S.

Preuve : Par construction $k_n := K_1 \varphi_n \rho \leq 0$ et $h^+ := k\rho \geq 0$ sont dans $L^p(S, g_0)$ avec $p > 1$, donc (e_n) admet une unique solution $u_n \in W^{2,p}(S)$ (voir 6.4) puisque, pour n assez grand, $k_n < 0$ quelque part. Par le principe du maximum de E. Hopf, $u_n \geq 0$.

Maintenant :

$$\Delta_0(u_{n+1} - u_n) = 2(k_{n+1} - k_n)u_{n+1} + 2k_n(u_{n+1} - u_n),$$

avec $k_{n+1} \leq k_n \leq 0$ et $u_{n+1} \geq 0$ donc, encore par le principe du maximum de Hopf, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 ; elle converge donc ponctuellement vers une limite u avec $0 \leq u \leq u_1$. Puisque $k_n \to K_1\rho$ dans $L^1(S, g_0)$, et que u_1 est bornée, la fonction u est solution faible sur S de (e).

Par régularité elliptique, et puisque $K_1\rho \in L^p_{loc}(S')$, on a $u \in W^{2,p}_{loc}(S') \cap L^\infty$. En particulier, u est continue sur S' et le théorème de Dini assure la convergence uniforme de u_n vers u sur les compacts de S'.

Reste à démontrer l'assertion d'unicité ; soit u' une (autre) solution bornée de (e). Comme $u - u' \in W^{2,p}_{loc} \subset W^{1,2}_{loc}(S')$, et que $\Delta_0(u - u') = 2K_1\rho(u - u')$ avec $K_1 \leq 0$, le principe du maximum de Hopf assure que, si $u - u'$ n'est pas constante (auquel cas elle est nulle), elle n'atteint pas son maximum sur S'.

On peut récrire l'identité précédente comme

$$\Delta_1(u - u') = 2K_1(u - u')\,.$$

La métrique g_1 est complète aux bouts de S', et de courbure minorée. On peut donc appliquer le principe du maximun généralisé ([Y]) qui assure l'existence d'une suite divergente $(x_i \in S')$ pour laquelle

$$(u - u')(x_i) \to \sup\,(u - u'), \qquad \limsup \Delta_1(u - u') \geq 0\,.$$

On obtient une contradiction si $\sup\,(u - u') > 0$ puisque $K_1 \leq -b^2 < 0$ hors d'un compact. ∎

6.12 Lemme : *On note $u = P^{-1}(k\rho) = \lim_{n\to\infty} u_n$.*
Alors $\| u \|_\infty = \lim \| u_n \|_\infty$.

Preuve : Puisque u_n décroît vers u, on a $\| u \|_\infty \leq \lim \| u_n \|_\infty$.

Soit $D \subset S'$ une partie compacte à bord lisse qui contient le support de k. Sur le complémentaire de D :

$$\Delta_0 u_n = 2\,(K_1 \varphi_n \rho)\, u_n + k\rho = 2\,(K_1\varphi_n\rho)\, u_n \leq 0$$

(car $u_n \geq 0$), donc u_n atteint son maximum en un point de D. La convergence uniforme de (u_n) vers u sur les compacts de S' assure le résultat. ∎

Revenons à la preuve du théorème 6.1. On cherche à résoudre l'équation

$$\Delta_0 v = K\rho\, \mathrm{e}^{2v} - K_1\rho \tag{E}$$

sur S'. La fonction $v_- = 0$ est sous-solution pour (E). Il reste à exhiber une sur-solution positive.

6.13 Lemme : *Sous les hypothèses de 6.1, pour n assez grand, il existe une solution $v_n \in W^{2,p}(S, g_0)$ pour l'équation*

$$\Delta_0 v_n = (K_1 \varphi_n \rho + k\rho)\, \mathrm{e}^{2v_n} - (K_1 \varphi_n \rho). \tag{E_n}$$

De plus v_n est positive, et est sur-solution pour (E).

Preuve : En notant $P_n(u) = \Delta_0 u - 2\,(K_1 \varphi_n \rho)\, u$, la preuve de la première étape nous assure de l'existence de v_n dès que

$$\| \, k\rho \, \|_1 + \| \, P_n^{-1}(k\rho) \, \|_\infty$$

est assez petit (la borne est donnée par une fonction de $\chi(S, \beta)$ exclusivement). Mais, avec les notations de 6.11 et 6.12,

$$\| \, P_n^{-1}(k\rho) \, \|_\infty = \| \, u_n \, \|_\infty \longrightarrow \| \, P^{-1}(k\rho) \, \|_\infty \, .$$

Sous les hypothèses de 6.1, on aura existence de v_n pour n assez grand. Cette fonction v_n est positive par le principe du maximum de E. Hopf.

Il reste à voir que v_n est sur-solution pour (E) ; mais

$$\Delta_0 v_n = \, (K_1 \varphi_n \rho + k\rho)\, \mathrm{e}^{2v_n} - \, (K_1 \varphi_n \rho\,) \geq (K_1 + k)\rho\, \mathrm{e}^{2v_n} - \, K_1 \rho$$

si et seulement si $K_1 \rho\, (\varphi_n - 1)(\, \mathrm{e}^{2v_n} - 1) \geq 0$. Le résultat découle des inégalités $\varphi_n \leq 1$, $K_1 \leq 0$ et $v_n \geq 0$. ∎

La méthode des sur- et sous-solutions, appliquée à l'équation (E) sur $S \setminus \mathrm{supp}\beta$ assure donc l'existence d'une solution $u \in C^2(S \setminus \mathrm{supp}\beta) \cap \mathrm{L}^\infty$ pour l'équation

$$\Delta_0 u = K\rho\, \mathrm{e}^{2u} - K_1 \rho.$$

La métrique $g = \, \mathrm{e}^{2u} g_1$, définie sur $S \setminus \mathrm{supp}\beta$ a pour courbure K, et est quasi-isométrique à g_1. En particulier, elle est à courbure totale finie et représente donc β grace à 1.3. Ceci achève la preuve du théorème. ∎

REFERENCES

[AMcO] Aviles, P. & McOwen, R., Conformal deformations of complete manifolds with negative curvature, *J. Differential Geom.* **21** (1985) 269–281 .

[F] Finn, R., On a class of conformal metrics, with application to differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.* **40** (1965) 1–30 .

[GT] Gilbarg, D. & Trudinger, N.S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag, New-York Berlin-Heidelberg (1983), Second edition.

[HT1] Hulin, D. & Troyanov, M., Prescribing curvature on open Riemann surfaces, a paraitre aux Math. Annalen.

[HT2] Hulin, D. & Troyanov, M., Sur la courbure des surfaces ouvertes, *C.R.A.S. Paris Série 1,* **310,** (1990) 203–206 .

[Hu] Huber, A., On subharmonic functions and differential geometry in the large, *Comment. Math. Helv.* **32** (1957–58) 13–72 .

[J] Junjie, T., Prescribing curvature with negative total curvature on open Riemann surfaces, preprint 1991 .

[KW] Kazdan, J. & Warner, F., Curvature functions for compact $2-$mani–folds, *Ann. Math.* **99** (1974) 14–47 .

[Ni] Ni, W.M., On the elliptic equation $\Delta u + K(x)\, u^{(n+2)/(n-2)} = 0$, its generalizations, and applications in geometry, *Indiana Univ. Math. J.* **31,** (1982) 495–529 .

[Nou] Noussair, E.S., On the existence of solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, *J. Differential Equations* **34** (1979) 482–495 .

[T1] Troyanov, M., Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities, *Trans. Amer. Math. Soc.* **324 (2)** (1991) 793–821.

[T2] Troyanov, M., The Schwarz lemma for non positively curved Riemannian surfaces, *Manuscripta Math.* **72** (1991) 251–256.

[T3] Troyanov, M., Un Principe de concentration-compacité pour les suites de surfaces riemanniennes, *Annales Inst. Henri Poincaré* **8 (5)** (1991) 419–441.

[Y] Yau, S.T., Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Commun. Pure Appl. Math,* **28** (1975), 201–228.

Dominique Hulin
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
F-91128 Palaiseau Cedex France