Feuille d'exercices n°1 : Irréductibilité, apériodicité, réversibilité.

Exercice 1. [Matrice de transition symétrique] Une matrice de transition P est dite symétrique si pour tout $x, y \in \Omega$, $P(x, y) = P(y, x)$. Montrer que la mesure de probabilité uniforme sur Ω est une mesure stationnaire pour P. (On rappelle que Ω est fini).

Exercice 2. [Stricte positivité de la mesure stationnaire] Soit π la mesure stationnaire d'une matrice de transition irréductible. Montrer que $\pi(y) > 0$ pour tout $y \in \Omega$.

Exercice 3. Montrer que si P est une matrice de transition, $Q = (P+I)/2$ définit une matrice de transition apériodique. On appelle la chaîne associée la chaîne lazy.

Exercice 4. [Périodicité du n-cycle] On appelle graphe une paire (V, E), où V est un ensemble dont les éléments sont appelés sommmets, et E est un sous-ensemble des paires non ordonnées d'éléments de E. La matrice de transition de la marche aléatoire (simple) sur le graphe $G = (V, E)$ est définie par

$$P(x, y) := \frac{1_{\{x,y\} \in E}}{\deg(x)} \text{ si } x, y \in V, \quad \text{avec } \deg(x) = \sum_{y \in V} 1_{\{x,y\} \in E}.$$

On considère le n-cycle, qui est le graphe (V, E) avec $V = \{0, \ldots, n-1\}$ et $E = \{\{x, y\}, |x-y| = 1\} \cup \{\{0, n-1\}\}$, et soit P la matrice de transition de la marche aléatoire sur le n-cycle.

1. Justifier par un dessin du graphe l'appellation n-cycle.

On pose $\mathcal{T}(x, y) = \{t \geq 0, P^t(x, y)\}$. On définit un chemin de longueur t de x à y comme une collection de sommets $(x_s)_{0 \leq s \leq t} \in V^{t+1}$ tel que pour tout $s \in \{0, \ldots, t-1\}, \{x_s, x_{s+1}\} \in E$.

1. Montrer que $t \in \mathcal{T}(x, y)$ ssi il existe un chemin de longueur t de x a y
2. Dans le cas $n = 4$, expliciter $\mathcal{T}(0, 0), \mathcal{T}(0, 1), \mathcal{T}(0, 2), \mathcal{T}(0, 3)$ et dans le cas $n = 5$, expliciter $\mathcal{T}(0, 0), \mathcal{T}(0, 1), \mathcal{T}(0, 2), \mathcal{T}(0, 3), \mathcal{T}(0, 4)$.
3. Décrire $\mathcal{T}(x, y)$ dans le cas général en fonction des quantités $k = |x - y|$ et $n - k$ (par exemple).
4. En déduire la période de P si n est pair, si n est impair ?
5. On suppose n impair. Trouver le plus petit entier t tel que pour tout $x, y \in V$, $P^t(x, y) > 0$.

Exercice 5. [Contraction] On étudie les propriétés de P vu comme opérateur agissant par multiplication à gauche $P : \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}^\Omega, f \mapsto Pf$.

1. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|.\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \max_x |f(x)|$:

$$\|Pf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

2. Soit π une mesure de probabilité stationnaire de P. Montrer que P est un opérateur contractant pour la norme $\|.\|_\pi$ (induite par le produit scalaire $\langle f, g\rangle_\pi = \sum_x f(x)g(x)\pi(x)$) :

$$\|Pf\|_\pi \leq \|f\|_\pi$$

Exercice 6. [Matrice de transition réversible et opérateur auto-adjoint] Montrer que P est réversible par rapport à π ssi P est autoadjoint dans $(\mathbb{R}^\Omega, \langle ., . \rangle_\pi)$, c'est-à-dire $\langle Pf, g\rangle_\pi = \langle f, Pg\rangle_\pi$ pour tout $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$.

Exercice 7. [Matrice de transition réversible] Soit P une matrice de transition sur Ω réversible par rapport à une mesure de probabilité π. Montrer que P^2 est encore réversible par rapport à π.

Exercice 8. [Unicité de la mesure stationnaire] Soit P une matrice de transition irréductible sur Ω. On cherche à montrer qu'il existe une unique mesure de probabilité stationnaire pour P. On note π_1 et π_2 deux mesures de probabilité stationnaires de P.

1. Soit $y \in \Omega$ qui minimise $x \mapsto \pi_1(x)/\pi_2(x)$, montrer que pour tout x tel que $P(x, y) > 0$, on a $\pi_1(y)/\pi_2(y) = \pi_1(x)/\pi_2(x)$.
2. Obtenir la même conclusion pour tout $x \in \Omega$ puis conclure.

Exercice 9. [Principe du maximum] Soit une chaîne de Markov irréductible de matrice de transition P, et $B \subset \Omega$. On suppose que h est harmonique en tout point du complémentaire $B^c = \Omega \setminus B$. Montrer qu'il existe $x \in B$ tel que $h(x) = \max_{y\in\Omega} h(y)$.

1. On note x_0 un élément de Ω tel que $h(x_0) = \max_{y\in\Omega} h(y)$. On suppose $x_0 \notin B$. Soit $b \in B$. Justifier l'existence de $(x_i)_{1\le i\le r}$ tel que $P(x_i, x_{i+1}) > 0$ pour tout $0 \le i \le r-1$ et $x_r = b$.
2. Montrer que $h(x_i) = h(x_0)$ pour tout i tel que $x_{i-1} \notin B$. On pourra utiliser une récurrence.
3. Conclure.

Exercice 10. [Somme de Césaro et existence d'une mesure stationnaire] Soit μ une mesure de probabilité sur Ω. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k \qquad \text{et} \qquad \mu_n = \mu Q_n$$

la moyenne de Césaro des itérées de P, et son application à μ.

1. Vérifier que la mesure de probabilité μ_n satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$
$$|\mu_n P(x) - \mu_n(x)| \le 1/n.$$
2. Justifier l'existence d'une suite extraite $(n_k)_k$ telle que pour tout x, la suite $(\mu_{n_k})_k$ converge. On notera ν cette limite.
3. Montrer que la mesure limite ν est une mesure de probabilité stationnaire pour P.

Exercice 11. [Somme de Césaro : convergence sans extraction] On reprend les notations de l'exercice 10. On veut maintenant montrer que $(\mu_n)_n$ converge. On note I la matrice identité, et on considère l'opérateur $I - P$ qui agit par multiplication par la droite selon $\mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}^\Omega, \nu \mapsto \nu(I-P)$ (noter que l'on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\Omega$ plutôt que le sous-ensemble des mesures de probabilité.)

1. Calculer νQ_n dans le cas où $\nu \in \mathrm{Im}(I-P)$ puis dans le cas où $\nu \in \mathrm{Ker}(I-P)$. En déduire que $\mathrm{Ker}(I-P) \cap \mathrm{Im}(I-P) = \{0\}$, et conclure à l'aide du théorème du rang que $\mathrm{Ker}(I-P) \oplus \mathrm{Im}(I-P) = \mathbb{R}^\Omega$.

2. Soit $\mu \in \mathbb{R}^\Omega$. En déduire qu'il existe $\nu_0, \nu_1 \in \mathbb{R}^\Omega$ telles que $\mu = \nu_0(I-P) + \nu_1$ avec $\nu_1(I-P) = 0$. Calculer μ_n en fonction de ν_0 et ν_1 et en déduire que $\mu_n \to \nu_1$ quand $n \to \infty$.
3. Déduire des questions précédentes que $\nu_1 = \nu$.

Exercice 12. [Lemme de Schur, et application aux chaînes apériodiques] Soit un sous-ensemble S de $\mathbb{N}$ de pgcd g. On note $\mathbb{N}(S)$ l'ensemble des combinaisons linéaires a coefficients dans $\mathbb{N}$ de S, et $\mathbb{Z}(S)$ l'ensemble des combinaisons linéaires a coefficients dans $\mathbb{Z}$ de S.

1. Montrer que $\mathbb{Z}(S) = g\mathbb{Z}$ (on pourra considérer le plus petit élément de $\mathbb{Z}(S) \cap \mathbb{N}^\star$ et montrer qu'il est égal au pgcd g de S, en montrant que ces deux quantités se divisent).
2. Dans le cas où S a deux éléments, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m$ implique $gn \in \mathbb{N}(S)$ (en d'autres termes, $|(\mathbb{Z}(S) \setminus \mathbb{N}(S)) \cap \mathbb{N}| < \infty$)

On admet que la même conclusion vaut encore dans le cas d'un ensemble S infini, et on se propose d'utiliser ce résultat pour montrer que si P est une matrice de transition irréductible et apériodique, alors il existe un entier m (indépendant de x et de y) tel que si $n \geq m$, $P^n(x,y) > 0$ pour tout $x, y \in \Omega$.

3. Soit $x \in \Omega$. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe $m = m(x) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m$ implique $n \in \mathcal{T}(x)$.
4. Conclure.

Feuille d'exercices n°2 : Valeurs propres et décomposition spectrale.

Exercice 13. [Vecteurs propres] Soit P une matrice de transition, de mesure stationnaire π, et f un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda \neq 1$. Montrer que $\sum_x f(x)\pi(x) = 0$.

Exercice 14. [Valeurs propres des matrices de transition] On étudie les propriétés de P matrice de transition vue comme opérateur agissant par multiplication à gauche $P : \mathbb{C}^\Omega \to \mathbb{C}^\Omega, f \mapsto Pf$.

1. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de P, alors son module satisfait $|\lambda| \leq 1$. (On pourra si besoin utiliser une des inégalités prouvées à l'exercice 5 puis choisir f un vecteur propre).
2. Montrer que, si P est irréductible, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.
3. Soit P réversible. Montrer que si λ est une valeur propre de la matrice $P_L = (P+I)/2$, alors $\lambda \geq 0$. On appelle P_L la version lazy (ou paresseuse) de P.
4. Si P est irréductible, et la matrice A à coefficients réels satisfait pour tout x, y, $0 \leq A(x,y) \leq P(x,y)$ avec $A \neq P$, et si λ est valeur propre de A, alors $|\lambda| < 1$.

Exercice 15. [Estimées sur la variance par diagonalisation] Soit P une matrice de transition réversible par rapport à la mesure stationnaire π. Posons $\mathrm{Var}_\pi(f) = \sum_x f^2(x)\pi(x) - (\sum_x f(x)\pi(x))^2$ pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

1. Observer que
$$\mathrm{Var}_\pi(f) = \langle f - \langle f, 1\rangle_\pi, f - \langle f, 1\rangle_\pi\rangle_\pi$$
2. Exprimer $P^t f$, $\langle P^t f, 1\rangle_\pi$ puis $\mathrm{Var}_\pi(P^t f)$ à l'aide de la décomposition de f dans la b.o.n de vecteurs propres de P.
3. En comparant les expressions de $\mathrm{Var}_\pi(P^t f)$ et $\mathrm{Var}_\pi(f) = \mathrm{Var}_\pi(P^0 f)$, déduire que, si l'on note $\lambda^\star = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } P, \lambda \neq 1\}$, on a
$$\mathrm{Var}_\pi(P^t f) \leq (\lambda^\star)^{2t}\, \mathrm{Var}_\pi(f).$$

Exercice 16. [Coefficients diagonaux et diagonalisation] Soit P une matrice de transition réversible par rapport à une mesure de probabilité π, soit $t \in \mathbb{N}$ et $x \in \Omega$.

1. Montrer que $P^{2t+2}(x,x) \leq P^{2t}(x,x)$.
2. Si de plus toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, montrer que $P^{t+1}(x,x) \leq P^t(x,x)$.

Exercice 17. [Cauchy-Schwarz et diagonalisation] Soit P une matrice de transition réversible par rapport à une mesure de probabilité π, de valeurs propres positives ou nulles. Montrer que, pour tout $x, y \in \Omega$, et tout $t \geq 0$,

$$\left|\frac{P^t(x,y)}{\pi(y)} - 1\right| \leq \sqrt{\frac{P^t(x,x)}{\pi(x)} - 1}\, \sqrt{\frac{P^t(y,y)}{\pi(y)} - 1}$$

Exercice 18. [Forme de Dirichlet] Soit P matrice de transition réversible par rapport à π. On note $\langle f, g\rangle_\pi = \sum_x f(x)g(x)\pi(x)$ le produit scalaire associé a π, et

$$\mathcal{E}(f, g) = \langle (I - P)f, g\rangle_\pi.$$

1. Montrer que
$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2}\sum_{x,y}[f(x) - f(y)]^2\pi(x)P(x, y)$$
2. Exprimer $\mathcal{E}(f, f)$ en fonction de la décomposition de f dans la b.o.n des vecteurs propres de P, puis en déduire que
$$1 - \lambda_2 = \min \frac{\mathcal{E}(f, f)}{\langle f, f\rangle_\pi}$$
où le min porte sur les fonctions $f \neq 0$ telles que $\langle f, 1\rangle_\pi = 0$. La quantité $1 - \lambda_2$ est appelée trou spectral dans la littérature.

Exercice 19. [Valeurs propres et périodicité] Soit P une matrice de transition irréductible. On rappelle la notation $\mathcal{T}(x) = \{t \in \mathbb{N}, P^t(x, x) > 0\}$. On veut montrer que

$$(\forall x \in \Omega,\ \mathcal{T}(x) \subseteq 2\mathbb{N}) \text{ si et seulement si } -1 \text{ valeur propre de } P.$$

1. Supposons -1 valeur propre et notons f un vecteur propre associé. Il existe y tel que $|f(y)| = \|f\|_\infty$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{2n+1}(y, y) = 0$. En déduire que $\mathcal{T}(x) \subseteq 2\mathbb{N}$ pour tout $x \in \Omega$.
2. Montrer la réciproque, en construisant explicitement un vecteur propre de valeur propre -1 (on commencera par exprimer, pour un tel vecteur propre, $f(y)$ en fonction de $f(x)$ pour y tel que $P(x, y) > 0$).

Feuille d'exercices n°3 : Quelques exemples classiques de chaînes de Markov

Exercice 20. [Mesure stationnaire sur graphe régulier] On appelle graphe régulier un graphe dont les degrés sont tous égaux. Montrer que la marche aléatoire sur un graphe régulier est réversible. (La notion de degré ainsi que celle de marche aléatoire sur un graphe est définie à l'exercice 4).

Exercice 21. [Mesure stationnaire] On rappelle que la matrice de transition de la marche aléatoire sur le graphe $G = (V, E)$ est définie à l'exercice 4. On pose $V = \{0, \dots, n-1\}$, et on définit les ensembles d'arêtes

$$E = \{\{x, y\}, |x - y| = 1\} \text{ et } E' = E \cup \{\{0, n-1\}\}$$

Soit P la matrice de transition de la marche aléatoire sur (V, E), appelée la marche aléatoire sur V réfléchie en 0 et $n-1$ et Q celle de la marche aléatoire sur le n-cycle $G = (V, E')$.

1. Décrire les deux matrices de transition P et Q. Sont-elles irréductibles ?
2. Calculer par la méthode de votre choix la mesure de probabilité stationnaire de chacune de ces deux matrices de transition.

Exercice 22. [Marche aléatoire sur réseau et chaîne réversible] On appelle réseau $(G = (V, E), \{c(e)\}_{e\in E})$ un graphe $G = (V, E)$ et une collection de nombres réels $\{c(e)\}_{e\in E}$ indicés par l'ensemble des arêtes appelés conductances, et qu'on supposera strictement positifs. On définit $c(x, y) = c(e)$ si $e = \{x, y\}$. On appelle marche aléatoire sur le réseau $(G = (V, E), \{c(e)\}_{e\in E})$ la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P(x, y) = \frac{c(x, y)}{c(x)} \quad \text{avec } c(x) = \sum_{y:\{x,y\}\in E} c(x, y).$$

On suppose enfin que le graphe G est connexe. Noter que la marche aléatoire sur graphe, définie à l'exercice 4, est le cas particulier où la fonction c est constante. On autorisera dans cet exercice la possibilité de boucles, c'est-à-dire l'existence d'éléments x tels que $\{x, x\} \in E$.

1. Montrer que la chaîne de Markov de matrice de transition P est irréductible et réversible.
2. Réciproquement, montrer qu'à toute chaîne de Markov irréductible et réversible, on peut associer un réseau avec les deux propriétés suivantes : le graphe sous-jacent est connexe ; la chaîne de Markov associée est la marche aléatoire sur ce réseau (définie comme ci-dessus).
3. On considère $G = (V, E)$ un 3-cycle (soit encore, en tant que graphe, un triangle). Proposer un choix de conductances sur les 3 arêtes telles que la mesure stationnaire associée soit (le vecteur ligne) $(5/18;\ 6/18 = 1/3;\ 7/18)$.

Exercice 23. Donner un exemple, le plus simple possible, de chaîne de Markov non réversible.

Exercice 24. [Ruine du joueur] On considère $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\Omega = \{0,\ldots,n\}$ de matrice de transition

$$P(i,j) = \frac{1_{\{|j-i|=1\}}}{2}, \quad i \in \{1,\ldots,n-1\}, j \in \{0,\ldots,n\}.$$

(Il est inutile pour les deux questions suivantes de préciser les transitions de la chaîne issue de 0 et de n). On s'intéresse au temps aléatoire $\tau = \min\{t \geq 0, X_t \in \{0,n\}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et plus précisément à la loi de la variable aléatoire X_τ (définie sur l'évènement $\{\tau < \infty\}$) ainsi qu'à l'espérance de τ.

1. Soit $k \in \Omega$. Quel résultat du cours assure que $\mathbb{E}_k(\tau) < \infty$? En déduire que $\mathbb{P}_k(\tau < \infty) = 1$ et que X_τ est bien définie sous $\mathbb{P}_k$.
2. Soit $k \in \Omega \setminus \{0,n\}$. Justifier soigneusement l'égalité suivante à l'aide de la propriété de Markov : $\mathbb{P}_k(X_\tau = n \,|\, X_1 = k+1) = \mathbb{P}_{k+1}(X_\tau = n)$.
3. Soit $k \in \Omega$. Posons $f(k) = \mathbb{P}_k(X_\tau = n)$. Donner $f(0)$ et $f(n)$, et montrer que
$$f(k) = \frac{1}{2}f(k-1) + \frac{1}{2}f(k+1), \quad k \in \Omega \setminus \{0,n\}.$$
Résoudre ce système.
4. Soit $k \in \Omega \setminus \{0,n\}$. Justifier soigneusement l'égalité $\mathbb{E}_k(\tau \,|\, X_1 = k+1) = 1 + \mathbb{E}_{k+1}(\tau)$.
5. Soit $k \in \Omega$. Posons $g(k) = \mathbb{E}_k(\tau)$. Donner $g(0)$ et $g(n)$. A l'aide de la propriété de Markov, établir que
$$g(k) = 1 + \frac{1}{2}g(k-1) + \frac{1}{2}g(k+1), \quad k \in \Omega \setminus \{0,n\}$$
Résoudre ce système (on pourra par exemple poser $h(k) = g(k+1) - g(k)$).
6. On suppose pour cette question que $P(0,1) = 1$. On pose $\tau' = \min\{t \geq 0, X_t = n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et $m(k) = \mathbb{E}_k(\tau')$. Donner $m(0) - m(1)$ et $m(n)$. Trouver l'équation de récurrence satisfaite par m et la résoudre.

Exercice 25. [Collecteur de coupons [1]] Soit $(X_t)_{t\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire $Y_t = |\{X_s, 1 \leq s \leq t\}|$ le cardinal de l'ensemble des valeurs distinctes prises par les X_s jusqu'à l'instant t (inclus). On s'intéresse dans cet exercice au temps d'atteinte d'un niveau donné par cette chaîne.

1. Observer que $Y_t \in \{1,\ldots,t\}$, et que les trajectoires $t \to Y_t$ sont croissantes. Montrer que $(Y_t)_{t\geq 1}$ est une chaîne de Markov sur $\Omega = \{1,\ldots,n\}$ et donner sa matrice de transition.
2. On note $\tau_k = \min\{t \geq 1, Y_t = k\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le temps d'atteinte de k. Reconnaître la loi de $\tau_{k+1} - \tau_k$, puis en déduire que
$$\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\tau_k) = n \sum_{j=n-k+1}^{n} \frac{1}{j},$$
et donner un équivalent de $\mathbb{E}(\tau_k)$ quand :

1. Interprétation : Une collection d'images panini compte n images différentes, on les reçoit aléatoirement chez notre marchand de journaux, quand a-t-on, en fonction de n, une collection complète ?

- $n \to \infty$ avec $k/n \to \alpha \in (0,1)$
- $n \to \infty$ avec $\ln(n-k+1)/\ln n \to 0$ (par exemple, $k = n$)

Comparer en particulier le temps nécessaire pour atteindre $n/2$ et n.

3. Montrer que pour tout $c > 0$, on a $\mathbb{P}\{\tau_n > \lceil n \log n + cn \rceil\} \leq \exp(-c)$.

Exercice 26. [Urne d'Erhenfest [2]] Soit $V = \{0,1\}^n$ et $E = \{\{x,y\} \in V^2 : \sum_{1\leq i\leq n} |x(i)-y(i)| = 1\}$. On considère la marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ (définie à l'exercice 4) sur l'hypercube $G = (V,E)$. On considère l'application somme des coordonnées $f : x \in V \mapsto \sum x(i) \in \{0,\ldots,n\}$ et on pose, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $Y_t = f(X_t)$.

1. Représenter le graphe obtenu pour $n = 1$ et $n = 2$, et justifier ainsi le nom d'hypercube pour le graphe $G = (V,E)$.
2. Quel est le degré des sommets de G ?
3. Donner la matrice de transition P de la chaîne (X_t), est-elle irréductible ? réversible ? Dans ce cas, donner sa mesure de probabilité stationnaire π.
4. On admet que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est encore une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition Q. Est-elle irréductible ?
5. On appelle mesure image de π par f la mesure ν sur $\{0,\ldots,n\}$ définie par $\nu(k) = \pi(f^{-1}\{k\})$, $k \in \{0,\ldots,n\}$. Déterminer ν et vérifier que Q est réversible par rapport à la mesure de probabilité ν.
6. En déduire à l'aide du cours la valeur de $g(k) = \mathbb{E}(\tau_k^+ | Y_0 = k)$. Calculer

$$\lim \frac{1}{n} \log(g(k))$$

lorsque $n \to \infty$ avec $k/n \to \alpha$. Donner enfin un équivalent de $g(n/2)$. (On pourra s'aider de la formula de Stirling $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$.)

Exercice 27. [Chaînes de naissance et mort] Soit $\Omega := \{0,1,\ldots,n\}$. On appelle chaîne de naissance et mort une chaîne de Markov dont la matrice de transition est tridiagonale, c'est-à-dire que $P(i,j) = 0$ si $|i-j| \geq 2$. On notera $p_i = P(i,i+1)$, $q_i = P(i,i)$ et $r_i = P(i,i-1)$ avec la convention que q_0 et p_n valent 0. Posons $w_0 = 1$ et pour $j \in \{1,\ldots,n\}$,

$$w_j = \frac{\prod_{0\leq i\leq j-1} p_i}{\prod_{1\leq i\leq j} r_i}.$$

1. Faire un dessin de Ω et les probabilités de transition entre les états de Ω. Donner une CNS pour que la chaîne soit irréductible. On supposera cette condition satisfaite dans la suite de l'exercice.
2. Montrer que P est réversible et exprimer son unique loi stationnaire π à l'aide des quantités $(w_j)_{0\leq j\leq n}$.

2. Interprétation de ce modèle, introduit en 1907 par les époux Ehrenfest pour illustrer certains des "paradoxes" apparus dans les fondements de la mécanique statistique naissante : on dipose de 2 urnes qui comprennent au total n boules, et on change d'urne à chaque instant une boule choisie au hasard parmi les n boules ; on étudie la répartion des boules dans les 2 urnes.

Soit $\Omega_\ell := \{0, 1, \dots, \ell\}$, pour $1 \le \ell \le n$. On pose $P_\ell(x, y) = P(x, y)$ si $x, y \in \Omega' \setminus \{(\ell, \ell)\}$, et $P_\ell(\ell, \ell) = p_\ell + q_\ell$. P_ℓ définit encore une matrice de transition, et on note $\tilde{X}$ la chaine de Markov associée à P_ℓ, et X la chaine de Markov associée à P. On pose $\tau_k^+ = \inf\{t \ge 1 \ : \ X_t = k\}$ et $\tau_k = \inf\{t \ge 0 \ : \ X_t = k\}$ pour $0 \le \ell \le n$, et $\widetilde{\tau}_k^+ = \inf\{t \ge 1 \ : \ \widetilde{X}_t = k\}$ et $\widetilde{\tau}_k = \inf\{t \ge 0 \ : \ \widetilde{X}_t = k\}$ pour $0 \le k \le \ell$.

3. Montrer que P_ℓ est réversible et exprimer son unique loi stationnaire π_ℓ à l'aide des $(w_j)_{0 \le j \le \ell}$.
4. Exprimer $\mathbb{E}_\ell(\widetilde{\tau}_\ell^+)$ en fonction de $\mathbb{E}_{\ell-1}(\tau_\ell)$, et en déduire la valeur de cette dernière quantité en fonction de (w_j) et (r_j).
5. En déduire $\mathbb{E}_k(\tau_\ell)$ pour tous $0 \le k < \ell \le n$ en fonction de (w_j) et (r_j).

Exercice 28. [Dernier site occupé] On considère la marche aléatoire simple sur le n-cycle (défini à l'exercice 4), et $\tau_x = \min\{t \ge 0, X_t = x\}$ le temps d'atteinte de x. On note Y le dernier site visité par la marche aléatoire, défini par $\{Y = y\} = \{\tau_y = \max_x \tau_x\}$.

1. Montrer que
$$\{Y = y\} = \{\tau_{y-1} < \tau_{y+1} < \tau_y\} \cup \{\tau_{y+1} < \tau_{y-1} < \tau_y\}.$$
2. Montrer que, pour tout $y \in \{0, \dots, n-1\}$,
$$\mathbb{P}_{y-1}(\tau_{y+1} < \tau_y) = 1/(n-1).$$
(On pourra trouver un système d'équations satisfaites par $f(k) = \mathbb{P}_k(\tau_{y+1} < \tau_y)$ et le résoudre).
3. En déduire la valeur de $\mathbb{P}_x(Y = y)$. Reconnaître cette distribution. Le résultat vous surprend-il ?

Feuille d'exercices n°4 : Distance sur les mesures de probabilité.

Exercice 29. [Action d'une matrice de transition à gauche et distance en variation totale] Soit une chaîne de Markov de matrice de transition P, et μ et ν deux mesures de probabilité. Montrer que

$$\|\mu \cdot P - \nu \cdot P\|_{TV} \leq \|\mu - \nu\|_{TV}.$$

et en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, si $d(t) = \max_x \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV}$, alors on a :

$$d(t+1) \leq d(t).$$

Exercice 30. [Mesure produit et distance en variation totale] Pour $i = 1 \dots n$ on se donne Ω_i un ensemble fini et μ_i et ν_i deux mesures de probabilité sur Ω_i. Sur l'espace produit $\Omega = \prod_i \Omega_i$, on définit alors les mesures produit $\mu = \prod_i \mu_i$ et $\nu = \prod_i \nu_i$. Montrer que

$$\|\mu - \nu\|_{TV} \leq \sum_i \|\mu_i - \nu_i\|_{TV}.$$

Exercice 31. [Définitions alternative de d et de $\bar{d}$.] Montrer que

$$\max_{x,y} \|P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)\|_{TV} = \max_{\mu,\nu} \|\mu P^t - \nu P^t\|_{TV}$$

et que

$$\max_x \|P^t(x, \cdot) - \pi\|_{TV} = \max_\mu \|\mu P^t - \pi\|_{TV}.$$

Exercice 32. [Sous-multiplicativité de $\bar{d}$] On rappelle la notation $\bar{d}(t) = \max_{x,y} \|P_t(x, \cdot) - P_t(y, \cdot)\|$. Montrer que $\bar{d}$ est sous-multiplicative :

$$\text{Pout tout } s, t \geq 0, \quad \bar{d}(t+s) \leq \bar{d}(t)\bar{d}(s).$$

1. Montrer que pour tout ensemble A, $P^{t+s}(x, A) = \mathbb{E}_s(P^s(X_t, A))$
2. Justifier qu'il existe $x, y \in \Omega$ et $A \subset \Omega$ tel que

$$\bar{d}(t+s) = P^{t+s}(x, A) - P^{t+s}(y, A)$$

3. Si A est un sous-ensemble de Ω, et si (X_t, Y_t) est un couplage de $P^t(x, \cdot)$ et $P^t(y, \cdot)$, observer que

$$P^{t+s}(x, A) - P^{t+s}(y, A) = \mathbb{E}((P^s(X_t, A) - P^s(Y_t, A))1_{\{X_t \neq Y_t\}})$$

4. Majorer cette expression à l'aide d'un couplage optimal et conclure.

Exercice 33. [Sous-multiplicativité de la distance en séparation] On définit la distance en séparation entre $P_t(x, \cdot)$ et π par

$$s_x(t) = \max_y \left[1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)}\right], \text{ puis } s(t) = \max_x s_x(t).$$

1. Montrer que pour tout $t \geq 1$, il existe une matrice stochastique Q_t telle que $P^t(x,y) = (1-s(t))\pi(y) + s(t)Q_t(x,y)$ et $\pi = \pi Q_t$.
2. Montrer que $P^{t+u}(x,y) = (1 - s(t)s(u))\pi(y) + s(t)s(u)\sum_z Q_t(x,z)Q_u(z,y)$
3. En déduire que $s(t+u) \leq s(t)s(u)$.

Exercice 34. [Distance en séparation et norme infinie] On compare dans cet exercice

$$d^s(t) = \max_{x,y}\left(1 - \frac{P^t(x,y)}{\pi(y)}\right) \text{ et } d^{(\infty)}(t) = \max_{x,y}\left|1 - \frac{P_t(x,y)}{\pi(y)}\right|$$

soit les distances en séparation et la distance associée à la norme infinie. Montrer que pour le marche aléatoire simple lazy sur graphe complet à n sommets, on a $t_{mix}^{(\infty)} \asymp \log(n)$ mais $d^s(2) \leq 1/4$.

Feuille d'exercices n°5 : Réseaux électriques

Exercice 35. Montrer à l'aide d'une technique de réduction de réseau que, pour la marche aléatoire simple sur le graphe $\{0,\dots,n\}$, et $k \in \{0,\dots,n\}$, $\mathbb{P}_k(\tau_n < \tau_0) = k/n$.

Exercice 36. Etant donné un réseau $(G = (V,E), (c(e))_{e\in E})$, et $a, z \in V$, montrer que la résistance effective $\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)$ est une fonction concave des résistances $\{r(e)\}_{e\in E}$ dont on munit le graphe. (On rappelle que les résistances sont les inverses des conductances : pour tout $e \in E$, $r(e)c(e) = 1$.)

Exercice 37. Etant donné un réseau $(G = (V,E), (c(e))_{e\in E})$, on définit l'énergie de Dirichlet d'une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{E}_{\mathtt{Dir}}(f) = \frac{1}{2} \sum_{\{v,w\}\in E} (f(v) - f(w))^2 c(v,w)$$

1. Prouver que
$$\min_{f: f(a)=1, f(z)=0} \mathcal{E}_{\mathtt{Dir}}(f) = \mathcal{C}(a \leftrightarrow z)$$
et qu'il existe un unique minimiseur, qui est une fonction harmonique en tout point de $V \setminus \{a,z\}$.
2. En déduire que $\mathcal{C}(a \leftrightarrow z)$ est une fonction convexe des conductances $\{c(e)\}_{e\in E}$.

Exercice 38. Etant donné un réseau $(G = (V,E), (c(e))_{e\in E})$, on se propose de démontrer que $(x,z) \mapsto \mathcal{R}(x \leftrightarrow z)$ définit une distance sur V. On se donne $x, y, z \in V$

1. Montrer que $\mathcal{R}(x \leftrightarrow z) = \mathcal{R}(z \leftrightarrow x)$.
2. Montrer que $\mathcal{R}(x \leftrightarrow z) \geq 0$, et $\mathcal{R}(x \leftrightarrow z) > 0$ si $x \neq z$.
3. Montrer que $\mathcal{R}(x \leftrightarrow z) \leq \mathcal{R}(x \leftrightarrow y) + \mathcal{R}(y \leftrightarrow z)$. On pourra remarquer que la somme des flots unitaires associés aux courant unité de x à y et de y à z donne le flot unitaire associe au courant unité de x à z, puis étudier les fonctions potentiel associées.