
Domaines nodaux et partitions spectrales minimales.

B. HELFFER (UNIV PARIS-SUD ET CNRS)

(D'APRÈS B. HELFFER, T. HOFFMANN-OSTENHOF ET
S. TERRACINI)

Résumé.

Nous considèrerons principalement le problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un domaine borné Ω . Nous nous proposons d'analyser les liens entre les partitions de Ω constituées des domaines nodaux d'une fonction propre de ce laplacien et celles constituées de k ouverts D_i qui sont minimales en ce sens qu'elles minimisent (pour k fixé) le maximum sur les D_i de la plus petite valeur propre $\lambda(D_i)$ de la réalisation de Dirichlet du laplacien dans D_i .

La plupart des résultats s'étendent au cas où le laplacien est remplacé par l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ avec $V \in L^\infty$ mais ceci ne sera pas détaillé ici.

Introduction et principaux résultats.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine à bord régulier (i.e. $C^{(1,\alpha)}$ pour un $\alpha > 0$). Nous considérons la réalisation de Dirichlet du laplacien $H(\Omega)$ dans Ω . On désigne par $\lambda_j(\Omega)$ la suite (rangée par ordre croissant) de ses valeurs propres et par u_j une base orthonormale associée constituée de fonctions propres. Il est classique que la première valeur propre est simple et qu'on peut choisir u_1 strictement positif dans Ω . Toutes les autres fonctions propres doivent (par orthogonalité) s'annuler dans Ω et admettent un représentant continu. Ceci nous conduit à définir pour $u \in C_0^0(\overline{\Omega})$ son **ensemble nodal**

$$N(u) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}}, \quad (1)$$

et les composantes connexes de $\Omega \setminus N(u)$ sont par définition les **domaines nodaux** de u . On désignera alors par $\mu(u)$ le nombre d'ensembles nodaux de u .

Partitions

Nous introduisons maintenant les notions de partition et de partition minimale. La première notion est une notion de partition en un sens faible.

Définition 1

Soit $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Une k -partition de Ω est une famille $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^k$ d'ouverts de Ω tels que

$$\bigcup_{i=1}^k D_i \subset \Omega, \quad D_i \cap D_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j. \quad (2)$$

Nous dirons qu'elle est *ouverte* si les D_i sont des ouverts de Ω , *connexe* si les D_i sont connexes.

\mathcal{D}_k désignera l'ensemble des k -partitions ouvertes de Ω .

Parfois (pour certaines preuves) nous serons amenés à considérer aussi des partitions mesurables.

Une autre définition est utile.

Définition 2

On dira qu'une partition est une *partition nodale* si elle est constituée des domaines nodaux d'une fonction propre.

Partitions minimales

Nous introduisons maintenant ce que nous entendons par **partition minimale**

Définition 3

Pour tout entier $k \geq 1$, et pour \mathcal{D} dans \mathfrak{D}_k , nous introduisons¹

$$\Lambda(\mathcal{D}) = \max_i \lambda(D_i). \quad (3)$$

Alors nous posons

$$\mathfrak{L}_k = \inf_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_k} \Lambda(\mathcal{D}). \quad (4)$$

et disons qu'une k -partition $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_k$ est minimale si elle vérifie

$$\mathfrak{L}_k = \Lambda(\mathcal{D}).$$

¹Dans le cas où D_i n'est pas assez régulier, on doit définir la notion de première valeur propre différemment.

Remarque.

Si $k = 2$, il est assez bien connu (voir par exemple [16] ou [9]) que \mathfrak{L}_2 est la seconde valeur propre et que toute 2-partition minimale correspond² à une partition nodale.

Nos partitions minimales vont hériter de représentants réguliers en un sens que nous allons maintenant préciser.

Définition 4

Une partition $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^k$ de Ω dans \mathfrak{D}_k est appelée *forte* si

$$\text{Int}(\overline{\cup_i D_i}) \setminus \partial\Omega = \Omega . \quad (5)$$

²après une modification de “capacité” nulle

Lorsqu'une partition est forte on peut lui associer naturellement un fermé dans $\overline{\Omega}$ qui joue le rôle de l'ensemble nodal dans le cas d'une partition nodale et qui est défini par :

$$N(\mathcal{D}) = \overline{\cup_i (\partial D_i \cap \Omega)} . \quad (6)$$

Partitions régulières

Toujours pour décrire les propriétés des partitions minimales, nous sommes conduits à introduire l'ensemble $\mathcal{R}(\Omega)$ des partitions régulières. Nous commençons par décrire l'ensemble $M(\Omega)$ des fermés N qui leur sont associés par (6).

Définition 5

Un fermé N de $\overline{\Omega}$ est régulier s'il vérifie :

(i) Il existe un nombre fini de points distincts $x_i \in \Omega \cap N$, des entiers $\nu_i \geq 2$ et des voisinages $B(x_i, \delta_i)$ de ces points tels que, $N \cap B(x_i, \delta_i)$ est la réunion de $\nu_i(x_i)$ courbes régulières (sans points doubles) se rencontrant en x_i et tels que dans le complémentaire de ces voisinages N is localement difféomorphe à une courbe régulière.

(ii) $\partial\Omega \cap N$ est un ensemble fini (éventuellement vide) de points z_i , tel que en z_i , $\rho_i \geq 1$ lignes touchent le bord transversalement avec le bord et transversalement deux à deux.

(iii) Enfin, N a la propriété des croisements à angle égal aux points x_i de Ω et de croisements à angle égal avec le bord aux points z_i .

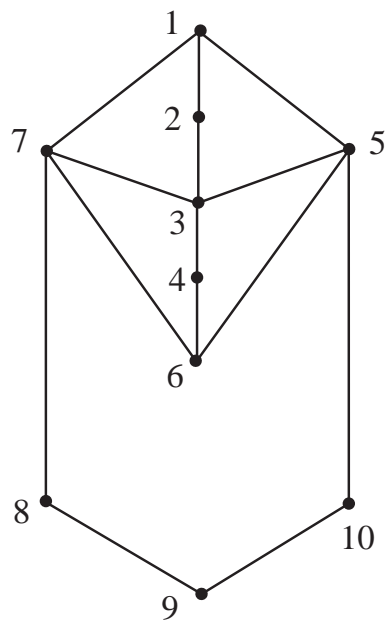
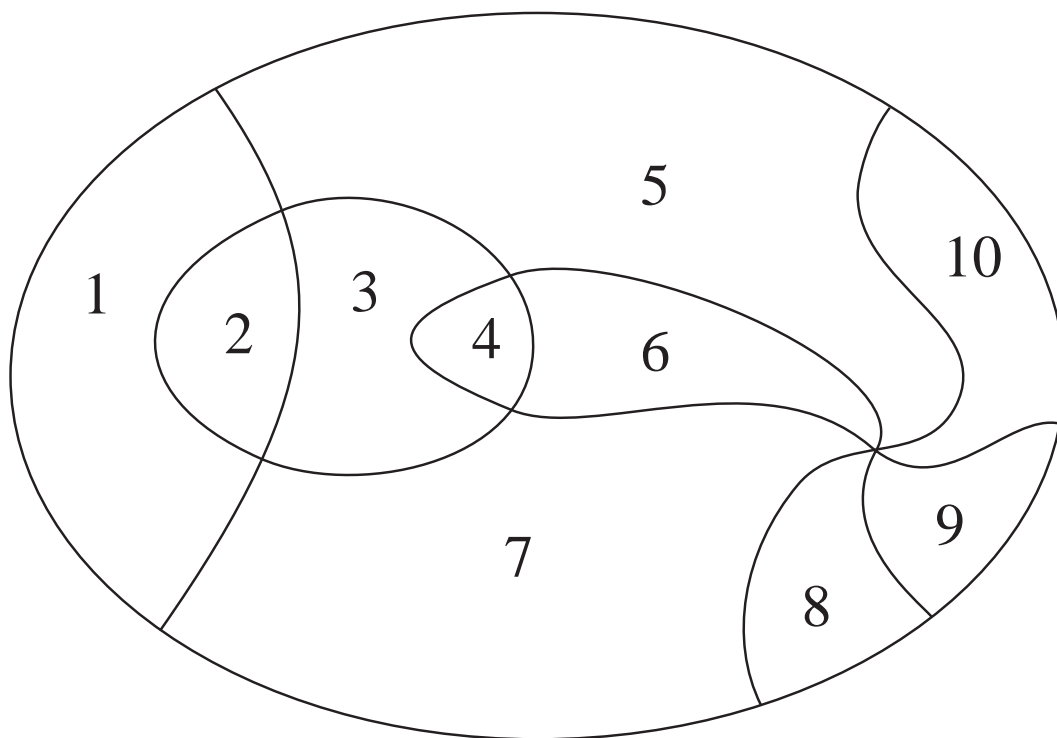


Figure 1: Un exemple de partition régulière bipartite avec graphe associé.

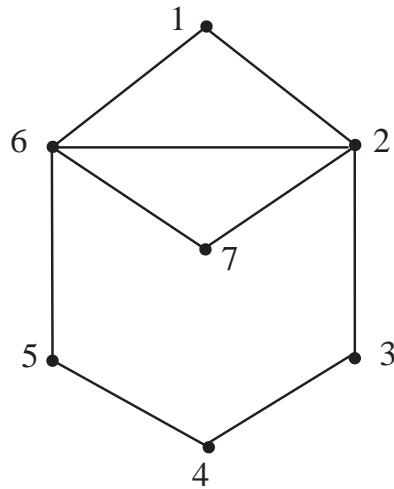
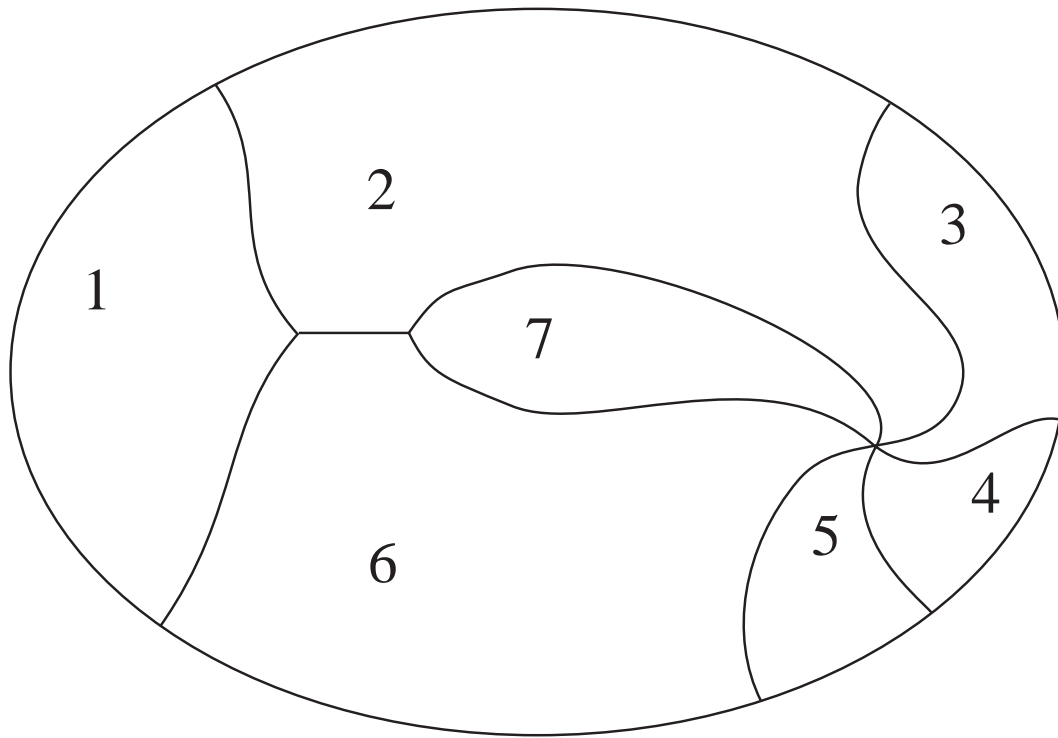


Figure 2: Un exemple de partition régulière nonbipartite avec graphe associé.

Principaux résultats

Le premier résultat est dû³ à Conti-Terracini-Verzini [7, 8, 9].

Théorème 6

Pour tout entier positif k , il existe une partition k -minimale régulière.

Ce résultat est complété par Helffer–Hoffmann-Ostenhof–Terracini [20] :

Théorème 7

Toute k -partition \mathcal{D} minimale de Ω a un représentant⁴ régulier.

Une question naturelle est de savoir si cette partition minimale est nodale. Le prochain théorème va donner un critère simple pour cette propriété.

³Du moins sous des hypothèses plus restrictives ensuite améliorées dans [20]

⁴On peut définir le représentant ainsi. Pour tout ouvert D_i on peut associer une fonction propre positive u_i de la réalisation de Dirichlet du Laplacien dans D_i que l'on considère comme un élément de $W_0^{1,2}(\Omega)$. Considérant son représentant continu \widehat{u}_i dont on peut montrer l'existence, le représentant régulier de D_i est défini par $\widehat{u}_i^{-1}(]0, +\infty[)$.

Pour cet énoncé nous avons besoin de quelques définitions supplémentaires.

Nous dirons que D_i et D_j sont **voisins** et nous écrirons $D_i \sim D_j$, si

$$D_{i,j} := \text{Int}(\overline{D_i \cup D_j}) \setminus \partial\Omega$$

est connexe. On peut alors définir pour toute famille \mathcal{D} un **graphe** $G(\mathcal{D})$ en associant à chaque D_i un sommet et à chaque paire $D_i \sim D_j$ une flèche. Nous dirons que le graphe associée est **bipartite** s'il peut être colorié avec deux couleurs, deux voisins étant de couleur différente. Nous rappelons que tout graphe associé à une famille nodale est bipartite. Toute partition dont le graphe est bipartite sera appelée bipartite. Nous avons établi dans [20] la propriété suivante :

Théorème 8

Toute partition minimale bipartite est nodale.

Une question naturelle est alors d'examiner si la situation décrite dans ce théorème est générale ou pas. Ce fut au départ pour nous une surprise de constater qu'elle ne pouvait se produire que dans une situation dite **strictement Courant**. Pour être plus précis et justifier cette terminologie, rappelons tout d'abord le théorème classique de Courant.

Théorème 9

Soit $k \geq 1$, λ_k la k -ème valeur propre. Alors pour toute fonction réelle non identiquement nulle u dans l'espace propre $E(\lambda_k)$ de $H(\Omega)$ associé à λ_k ,

$$\mu(u) \leq k .$$

Avec les notations précédentes, nous dirons que u est strictement Courant si

$$u \in E(\lambda_k) \setminus \{0\} \text{ et } \mu(u) = k .$$

Pour tout entier $k \geq 1$, nous désignons par L_k la plus petite valeur propre dont l'espace propre contient une fonction propre à k domaines nodaux. Nous poserons $L_k = \infty$, s'il n'existe aucune fonction propre à k domaines nodaux. On peut montrer en toute généralité [20] que :

$$\lambda_k \leq \mathfrak{L}_k \leq L_k . \quad (7)$$

L'examen des cas d'égalité s'avère très intéressant. C'est l'objet du

Théorème 10

Si $\mathfrak{L}_k = L_k$ ou $\mathfrak{L}_k = \lambda_k$, alors

$$\lambda_k = \mathfrak{L}_k = L_k .$$

De plus, on peut alors trouver dans $E(\lambda_k)$ une fonction u strictement Courant.

En d'autres termes, le seul cas où une partition nodale est minimale est le cas strictement Courant.

Remarques.

(i) Dans le cas de la dimension un, la théorie de Sturm-Liouville montre que

$$L_k = \mathfrak{L}_k = \lambda_k, \quad \forall k \geq 1. \quad (8)$$

(ii) Il est aussi facile de montrer que

$$\mathfrak{L}_1 = L_1 = \lambda_1, \quad (9)$$

et (on rappelle) que

$$\mathfrak{L}_2 = L_2 = \lambda_2, \quad (10)$$

en utilisant l'orthogonalité de u_2 à la première fonction propre (qui est strictement positive) et le théorème de Courant.

(iii) La suite $(\mathfrak{L}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Pour reconnaître si une partition est effectivement minimale, l'observation suivante est utile :

Proposition 11

Soit $\mathcal{D} = (D_i)_{i=(1,\dots,k)}$ une k -partition minimale pour $\mathfrak{L}_k(\Omega)$. Alors, toute sous-famille $I \in \{1, \dots, k\}$, $\mathcal{D}^I = (D_i)_{i \in I}$ vérifie

$$\mathfrak{L}_k = \Lambda(\mathcal{D}^I) = \mathfrak{L}_{|I|}(\Omega_I^*), \quad (11)$$

où

$$\Omega_I^* := \text{Int}(\overline{\cup_{i \in I} D_i} \setminus \partial\Omega).$$

Remarque.

On en tire des conséquences pour les sous-familles de \mathcal{D} bipartites. En particulier, l'énoncé (pour $k = 2$) implique la compatibilité des paires de voisins. Nous obtenons en effet des 2-partitions minimales, bien entendu bipartites. Par conséquent toute paire (D_i, D_j) de voisins est la partition nodale d'une fonction propre associée à la seconde valeur propre de $H(D_{i,j})$.

Variations sur un thème de Pleijel.

Comme conséquence d'un théorème plus général de [4], nous avons l'analogue suivant de la proposition 11.

Proposition 12

Supposons que u soit strictement Courant. Soit $\{D_i\}_1^k$ la famille des domaines nodaux associés. Soit L un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, k\}$ avec $\#L = \ell < k$ et soit $\Omega_L^* = \text{Int}(\overline{\cup_{i \in L} D_i}) \setminus \partial\Omega$. Alors

$$\lambda_\ell(\Omega_L^*) = \lambda_k \quad (12)$$

où, pour $j \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_j(\Omega_L^*)$ désigne la j -ème valeur propre de $H(\Omega_L^*)$.

De plus, si Ω_L^* est connexe, $u|_{\Omega_L^*}$ est strictement Courant et $\lambda_\ell(\Omega_L^*)$ est simple.

Il est bien connu qu'en dimension un, la k -ème fonction propre d'un opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + v(x)$ sur un intervalle a exactement k domaines nodaux et que ce résultat est faux en dimension plus élevée. Le théorème de Pleijel [23] dit en effet :

Théorème 13

Le nombre de k pour lesquels on peut trouver dans $E(\lambda_k)$ une fonction propre avec k ensembles nodaux est fini.

Les arguments de cette preuve donnent en fait plus d'informations que ce seul énoncé. Décrivons certains aspects de cette preuve.

Tout d'abord nous avons une borne inférieure universelle pour \mathfrak{L}_k .

Proposition 14 .

$$L_k(\Omega) \geq \mathfrak{L}_k(\Omega) \geq \frac{\pi j^2}{|\Omega|} k, \quad (13)$$

où $|\Omega|$ désigne l'aire de Ω et j est le plus petit zéro⁵ non trivial de la fonction de Bessel J_0 .

La preuve est une conséquence directe de l'inégalité de Faber-Krahn, qui dit qu'à aire fixée la première valeur propre est minimale dans le cas du disque.

Le théorème de Pleijel est alors, en observant que $j^2 > 4$, une conséquence de l'estimation asymptotique de Weyl qui donne :

$$\lambda_n \sim \frac{4\pi n}{|\Omega|}, \quad (14)$$

quand $n \rightarrow +\infty$.

⁵ $j \sim 2.4048\dots$.

Estimation asymptotique

Proposition 15

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}_k(\Omega)}{k} \leq \lambda_1(Hx_1)/|\Omega|, \quad (15)$$

où Hx_1 est l'hexagone régulier d'aire unité.

Pour la preuve, il suffit d'utiliser une partition (faible!) de Ω par des hexagones réguliers d'aire $\frac{|\Omega|}{k}$, constituant un pavage partiel.

Nous devons à M. Van den Berg la conjecture de l'existence de la limite $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\mathfrak{L}_k}{k}$ et qu'elle serait égale à $\lambda_1(Hx_1)$. Cette conjecture a été explorée numériquement par V. Bonnaillie-Noel et G. Vial. On pourra consulter le site

<http://www.bretagne.ens-cachan/math/simulations/MinimalPartitions/>

Partitions minimales et strictement Courant

Nous esquissons la preuve du Théorème 10. Elle commence par l'introduction d'une famille exhaustive $N(u, \alpha)$.

Soit u une fonction propre de $H(\Omega)$ avec k domaines nodaux et considérons $N(u) \in \mathcal{N}(\Omega)$. Tout d'abord nous considérons les points singuliers (correspondant aux intersections de lignes entre elles ou avec le bord).

De chacun de ces points part dans $N(u)$ un arc régulier qui est ou bien fermé (et revenant au point initial) ou bien rencontrant un autre point singulier. Nous désignons par \mathcal{A}_* la famille constitués de ces arcs. Nous ajoutons la classe \mathcal{A}_{**} des lacets réguliers (sans selfintersections ou croisements) et posons

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_* \cup \mathcal{A}_{**} .$$

Pour chaque élément de $A \in \mathcal{A}$ on peut définir naturellement⁶ un point médian x_A . On paramètre alors naturellement A par une application L :
 $[-1, +1] \ni t \mapsto L(A, t)$ telle que

$$L(A, 0) = x_A, \quad L(A, -1) = y_A^-, \quad L(A, 1) = y_A^+,$$

où y_{A^-} et y_{A^+} sont les extrémités de l'arc⁷

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, nous considérons alors

$$N(u, \alpha) = \{N(u) \setminus L(A, (-1 + \alpha, 1 - \alpha))\} \quad (16)$$

et complétons la définition par

$$N(u, 0) = \emptyset \text{ et } N(u, 1) = N(u). \quad (17)$$

Notons que par construction, pour tout $0 < \alpha$, $N(u, \alpha)$ contient tous les points critiques.

⁶ou arbitrairement dans le cas d'un lacet

⁷le point opposé dans le cas d'un lacet

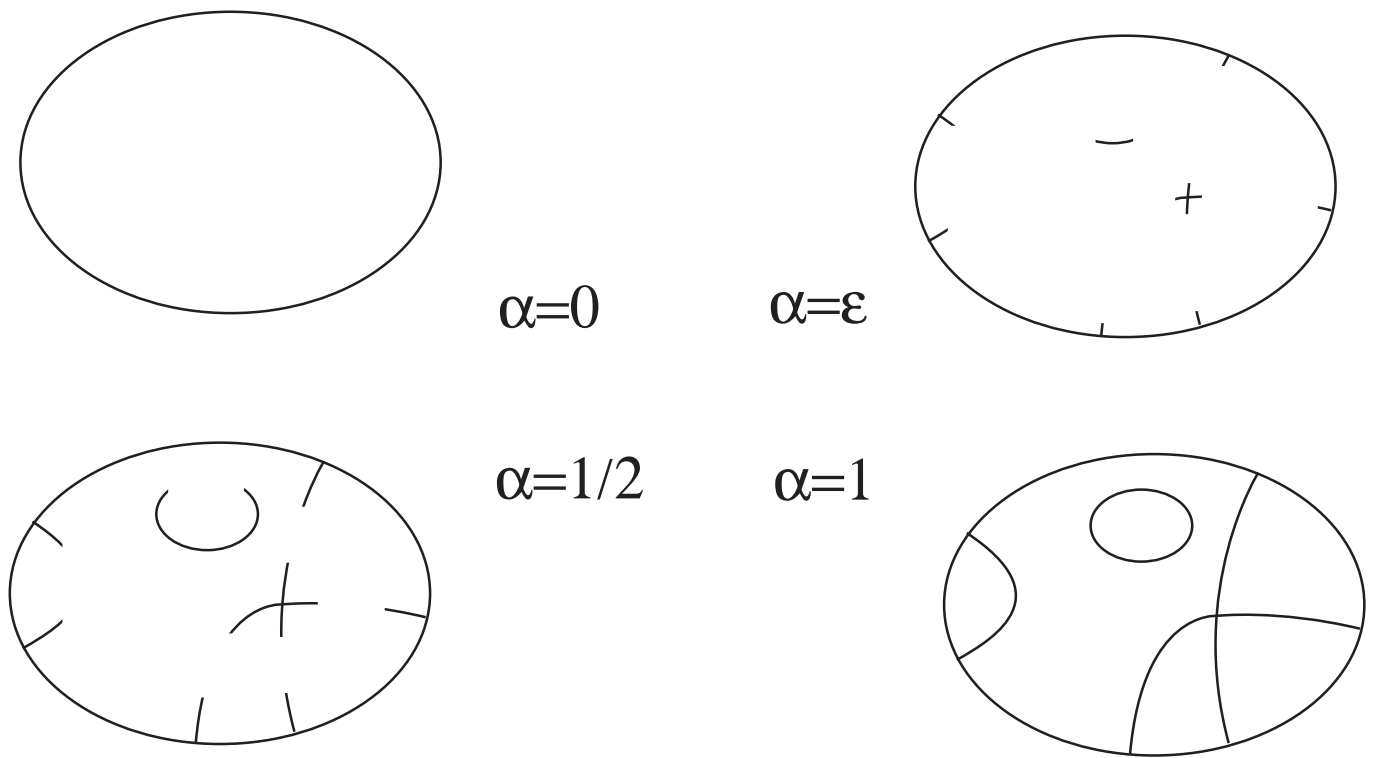


Figure 3: Un exemple de famille exhaustive.

Preuve du théorème 10.

Supposons par l'absurde que, pour un k ,

$$\mathfrak{L}_k = L_k ,$$

mais que $\lambda_k < \lambda_m = L_k$ pour $m > k$.

On suppose que m est minimal avec cette propriété, et donc que

$$\lambda_{m-1} < \lambda_m . \quad (18)$$

Soit u_m une fonction propre normalisée avec donc $\mu(u_m) = k$ domaines nodaux D_i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Alors nous associons à $N(u_m, \alpha)$ la famille décroissante d'ouverts

$$\Omega(\alpha) = \Omega \setminus N(u_m, \alpha) , \quad (19)$$

et considérons le spectre de

$$H(\alpha) := H(\Omega(\alpha)) . \quad (20)$$

Alors, $H(0)$ est notre opérateur initial $H(\Omega)$ et

$$H(1) = \bigoplus_{i=1}^k H(D_i) . \quad (21)$$

Par conséquent $H(1)$ a comme première valeur propre λ_m avec la multiplicité k . Par construction $\sigma(H(0)) = \sigma(H)$. De plus $\lambda_1(H(1))$ est de multiplicité k et

$$\lambda_{k+1}(H(1)) > \lambda_k(H(1)) = \lambda_m(H(0)) .$$

Nous avons alors :

- Pour tout ℓ , $\lambda_\ell(H(\alpha))$ est strictement croissante avec α .
- Pour tout ℓ , $\lambda_\ell(H(\alpha))$ dépend continûment de α .
- Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, $\lambda_m \in \sigma(H(\alpha))$.

Pour le dernier item, il suffit d'observer que, par la construction de $N(u_m, \alpha)$, la restriction de u_m à $\Omega(\alpha)$ est une fonction propre de $H(\alpha)$.

Rappelons que nous sommes au milieu d'un raisonnement par l'absurde et

considérons d'abord le cas où λ_m est simple

Alors, il existe un plus petit $\alpha_1 \in (0, 1)$ tel que

$$\lambda_1(\alpha_1) < \lambda_2(\alpha_1) \leq \cdots \leq \lambda_{m-1}(\alpha_1) = \lambda_m(\alpha_1), \quad (22)$$

avec $\lambda_m(\alpha_1) = \lambda_m$.

Considérons cette valeur propre de $H(\alpha_1)$. La restriction de u_m à $\Omega(\alpha_1)$ donne une première fonction propre mais il existe une fonction propre réelle linéairement indépendante v de $H(\alpha_1)$ telle que v soit orthogonal à u_m dans $L^2(\Omega(\alpha_1))$:

$$\langle u_m | v \rangle = 0. \quad (23)$$

Nous allons maintenant jouer dans l'espace vectoriel engendré par u_m et v .

Lemme 16

Il existe $\beta_0 > 0$, tel que $\forall \beta \in (-\beta_0, +\beta_0)$ la fonction $w_\beta = u_m + \beta v$ a exactement k ensembles nodaux.

De plus, la partition nodale de w_β donne, pour $\beta \neq 0$, une partition minimale de Ω , distincte de celle de u_m et bipartite.

Proof

Nous rappelons que cette construction est faite pour $\alpha = \alpha_1 \in (0, 1)$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, soit

$$I_A := L(A, (-1 + \alpha_1, 1 - \alpha_1)) ,$$

et $\mathcal{V}_A \subset \Omega$ un voisinage ouvert $\overline{I_A}$, dont le bord croise deux fois (et transversalement) $N(u)$ et tel que chaque composante connexe de $\Omega(\alpha_1) \setminus \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{\mathcal{V}_A}$ (qui est contenue dans $\Omega(1)$), est contenu dans un unique domaine nodal de u_m .

Nous supposons que nous avons colorié ces domaines nodaux par des $+$ et des $-$, et ceci permet d'écrire, pour tout $A \in \mathcal{A}$, la décomposition

$$\partial\mathcal{V}_A \cap \Omega(\alpha_1) = b_A^+ \cup b_A^- ,$$

où b_A^\pm est contenu dans un domaine nodal positif ou négatif de u_m .

Par le Lemme de Hopf, il existe β_0 tel que, si $|\beta| \leq \beta_0$, alors $\mu(u_m + \beta v)$ peut seulement augmenter.

A l'opposé, si ce nombre augmentait strictement, ceci donnerait une majoration de \mathfrak{L}_{k+1} , qui, jointe à la stricte monotonie de $\ell \mapsto \mathfrak{L}_\ell$, donnerait

$$\lambda_m = \mathfrak{L}_k < \mathfrak{L}_{k+1} \leq \lambda_m ,$$

d'où la contradiction.

Ainsi w_β a exactement k domaines nodaux constituant une k -partition minimale $\mathcal{D}' \in \mathfrak{D}_k$ de Ω . Mais $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$ car u_m et v (et donc w_β pour $\beta \neq 0$) sont linéairement indépendants. De plus, on peut vérifier que $G(\mathcal{D}')$ est bipartite. \square

Maintenant, par le théorème 8, l'extension naturelle de w_β à Ω est une fonction propre de $H = H(0)$ et ceci impliquerait que λ_m a la multiplicité au moins deux, en contradiction avec l'hypothèse faite au départ.

Dans le cas où λ_m est de plus grande multiplicité, on peut aussi faire marcher la démonstration moyennant un truc supplémentaire.

La conjonction du Théorème 10 et du Théorème de Pleijel donne :

Corollaire.

$$|\{k \mid \mathfrak{L}_k = L_k\}| < \infty. \quad (24)$$

Il est maintenant plus simple d'analyser à la main la situation pour le disque et pour les rectangles (au moins dans le cas irrationnel), car nous avons juste à déterminer les fonctions propres strictement Courant.

Exemple 1: Le cas du disque

Par les tables sur les fonctions de Bessel on n'a pas mal d'information sur les premières valeurs propres. Ce qui nous intéresse ici est d'ordonner les différentes valeurs propres pouvant correspondre à des moments angulaires différents. En particulier, cela va nous donner un premier exemple où les inégalités (7) deviennent strictes.

Considérons $H(B_1)$. En coordonnées polaires, nous avons :

$$-\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

avec une condition de Dirichlet sur $r = 1$. Pour chaque $\ell \in \mathbb{N}$, on a à regarder les valeurs propres $\lambda_{\ell,j}$ de

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\ell^2}{r^2}\right) f_{\ell,j} = \lambda_{\ell,j} f_{\ell,j}, \text{ dans } (0, 1).$$

Observons que cet opérateur est autoadjoint sur $L^2((0, 1), r dr)$.

Les fonctions propres correspondantes de ce problème sont

$$u(r, \theta) = f_{\ell,j}(r) (a \cos \ell\theta + b \sin \ell\theta), \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0), \quad (25)$$

où $f_{\ell,j}(r)$ sont des fonctions de Bessel satisfaisant pour $\ell = 0$, $f'_{0,j}(0) = 0$ et $f_{0,j}(1) = 0$ et pour $\ell > 0$, $f_{\ell,j}(0) = f_{\ell,j}(1) = 0$.

On sait ordonner facilement les quinze premières valeurs propres $\lambda_{\ell,j}$ en regardant dans des tables. On rappelle que les zéros des fonctions de Bessel sont liés aux valeurs propres par

$$\lambda_{\ell,k} = (j_{\ell,k})^2. \quad (26)$$

Dans le cas du disque nous pouvons montrer

Proposition 17

Sauf si $k = 1, 2$ et 4 , les partitions minimales ne sont jamais nodales.

Partition minimale pour $k = 3$.

Regardons l'exemple le plus simple

$$L_3 > \mathfrak{L}_3. \quad (27)$$

On peut découper B_1 en trois secteurs égaux d'ouverture $2\pi/3$. Notons $S_{1/3}$ un tel secteur. Alors la première valeur propre correspondante $\lambda(S_{\frac{1}{3}})$ vérifie :

$$\mathfrak{L}_3 \leq \lambda(S_{\frac{1}{3}})$$

Par monotonie, nous avons :

$$\lambda(S_{\frac{1}{3}}) < \lambda(S_{\frac{1}{4}})$$

et on vérifie que

$$\lambda(S_{\frac{1}{4}}) = \lambda_4 = \lambda_{2,1} ,$$

(voir (25)). La preuve de (27) se déduit de

$$L_3 > \lambda_4 = \mathfrak{L}_4 > \lambda(S_{\frac{1}{3}}) \geq \mathfrak{L}_3.$$

On est tenté de conjecturer que la **3**-partition minimale du disque est ce que nous appellerons la partition (du sigle) Mercedes.

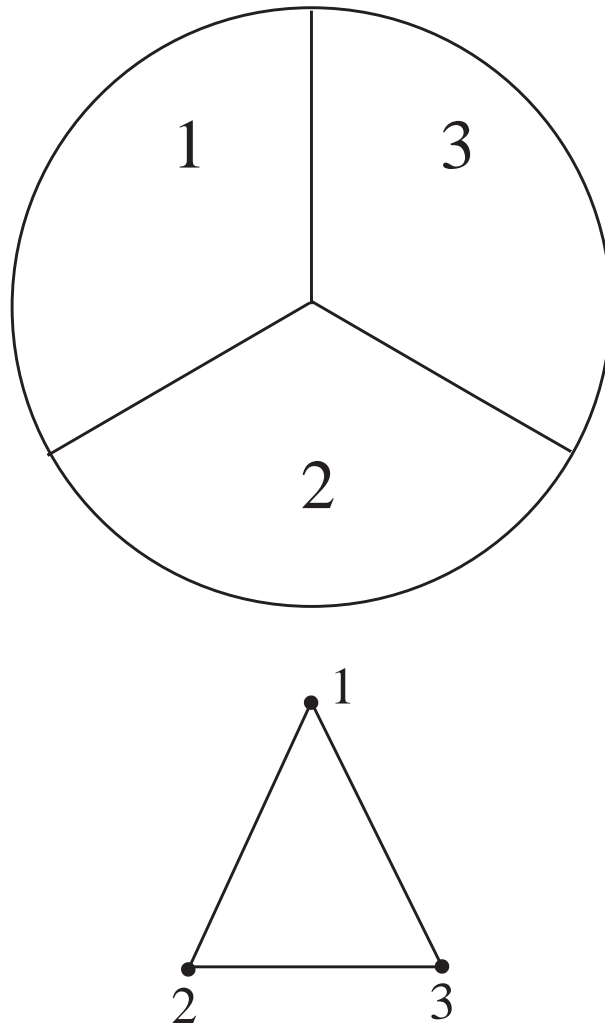


Figure 4: Le logo Mercedes et son graphe associé.

Malgré beaucoup d'efforts, l'égalité $\mathfrak{L}_3 = \lambda(S_{\frac{1}{3}})$, qui correspond aussi à la sixième valeur propre du Laplacien sur le revêtement du disque à deux feuillets, qui est strictement Courant, reste une conjecture. Des résultats partiels non triviaux (de Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof) ont permis de montrer que :

- (i) Il n'y a essentiellement que trois types topologiques possibles pour une **3**-partition minimale.
- (ii) Même si on s'attend à ce que la partition minimale hérite de certaines des symétries du disque, elle ne peut pas être trop symétrique. Par exemple, une **3**-partition minimale ne peut pas être invariante par la symétrie par rapport à l'origine.
- (iii) S'il existe une **3**-partition minimale invariante par permutation, alors c'est la partition Mercedes.
- (iv) S'il existe une **3**-partition minimale \mathcal{D} qui n'a qu'un point singulier dans le disque et si 0 est dans $N(\mathcal{D})$, alors c'est de nouveau la partition Mercedes.

Exemple 2: le cas du rectangle

Pour un rectangle de côtés a et b , le spectre est donné par

$$\lambda_{m,n} := \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)$$

$((m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2)$.

La première remarque est que toutes les valeurs propres sont simples si $\frac{a^2}{b^2}$ est irrationnel ce que nous supposons maintenant (sauf précision du contraire).

On peut associer à $\lambda_{m,n}$, une fonction propre (essentiellement) unique $u_{m,n}$ telle que $\mu(u_{m,n}) = nm$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la plus petite valeur propre correspondant à k domaines nodaux est

$$L_k = \pi^2 \inf_{mn=k} (m^2/a^2 + n^2/b^2) .$$

Le comportement de L_k dépend des propriétés arithmétiques de k mais on a toujours

$$L_k \geq 2\pi^2 k / (ab) . \quad (28)$$

Ceci implique immédiatement

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{L_k}{k} \geq \frac{2\pi^2}{ab} . \quad (29)$$

Proposition.

Dans le cas irrationnel, $\lambda_{m,n}$ ne peut correspondre à une situation Courant-strict si

- $\inf(m, n) \geq 3$

ou si

- $\inf(m, n) \geq 2$ et $\max(m, n) \geq 4$.

Il ne reste donc que peu de cas à analyser à la main pour lesquels la réponse peut dépendre de $\frac{a}{b}$.

Dans le cas du carré, un argument similaire au cas du disque montre que

$$\mathfrak{L}_3 < L_3 .$$

On observe en effet que λ_4 admet une fonction propre Courant-strict, de sorte que

$$\mathfrak{L}_4 = \lambda_4 ,$$

et qu'il n'y a pas dans l'espace propre correspondant à $\lambda_2 = \lambda_3$ de fonctions propres avec trois domaines nodaux (par le théorème de Courant).

Si on fait l'hypothèse qu'il existe une **3**-partition minimale du carré symétrique par rapport à un des deux axes, on peut faire une réduction au demi-carré et on peut au moins définir une approche pour rechercher une **2**-partition minimale du demi-carré. Ceci se ramène à rechercher une fonction propre correspondant à la deuxième valeur propre dont la partition nodale donnerait la partition minimale. On est ainsi amené à minimiser sur une famille de problèmes mixtes Dirichlet-Neumann.

Des calculs numériques de V. Bonnaille-Noël et G. Vial ont conduit au candidat naturel suivant pour une partition minimale symétrique⁸.

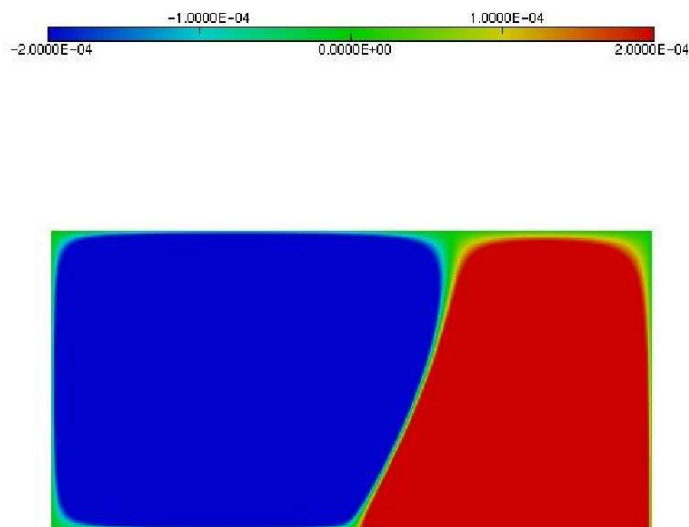


Figure 5: Trace sur le demi-carré d'un candidat à être une 3-partition minimale.

La structure complète est obtenue à partir du demi-carré par réflexion par rapport à l'axe horizontal. Les trois éléments de la partition sont donc le domaine bleu, le domaine réfléchi et comme troisième domaine le domaine rouge complété par son réfléchi.

⁸<http://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/simulations/MinimalPartitions/>

Une approche alternative dans le cas régulier.

Même si ces techniques sont moins puissantes que dans les travaux mentionnés auparavant, il est instructif de rappeler quelques résultats antérieurs de [16, 17] qui donnent un éclairage différent.

Le théorème principal est le suivant :

Théorème 18

Soit Ω régulier et simplement connexe, et N un fermé régulier dans $\overline{\Omega}$. Supposons que la partition associée $\mathcal{D}(N) = \{D_1, \dots, D_\mu\}$ soit bipartite et qu'on ait pour un $\lambda \in \mathbb{R}$,

- λ est la première valeur propre de $H(D_i)$.
- *Condition de compatibilité par paire :*
 λ est valeur propre de $H(D_{i,j})$ pour toute paire de voisins D_i et D_j , qui sont alors les deux domaines nodaux d'une fonction propre.

Alors, il existe u dans $E(\lambda) \setminus \{0\}$ dont $\mathcal{D}(N)$ est la partition nodale.

Remarques.

- Si Ω n'est pas simplement connexe on doit ajouter une condition d'holonomie (voir [17]). Dans le cas des partitions minimales, cette condition se réduit à la condition des deux couleurs.
- Remarquons que la condition de compatibilité par paire est plus faible que celle de dire que λ est la seconde valeur propre de $H(D_{i,j})$ pour toute paire de voisins (D_i, D_j) .

Ce théorème 18 implique :

Corollaire.

Soit Ω un ouvert simplement connexe, $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 2$) et soit $\mathcal{D}^{min} = (D_i)_{i=1,\dots,k}$ une partition minimale forte et régulière. Alors, il existe une fonction propre u de $H(\Omega)$ associée à

$$\lambda = \max_i(\lambda(D_i)) ,$$

telle que \mathcal{D}^{min} est la partition nodale associée à u .

Preuve du corollaire

Si on pose $\lambda = \max_i(\lambda(D_i))$, le premier point est que tous les $\lambda(D_i)$ doivent être égaux. Sinon, on pourrait déformer la frontière commune à deux voisins D_i et D_j avec $\lambda(D_i) \neq \lambda(D_j)$ au voisinage d'un point régulier permettant de diminuer $\max\{\lambda(D_i), \lambda(D_j)\}$ puis en itérant $\Lambda(\mathcal{D})$ en contradiction avec l'hypothèse de minimalité.

Le second point est d'observer que pour toute paire de voisins D_i et D_j , λ doit être la seconde valeur propre de $H(D_{i,j})$. Si ce n'était pas le cas pour une paire (i, j) , les deux ensembles nodaux d'une fonction propre correspondant à la deuxième valeur propre $H(D_{i,j})$ donneraient deux nouveaux ouverts D'_i et D'_j avec $\lambda(D'_i) = \lambda(D'_j) < \lambda$, en contradiction avec l'hypothèse de minimalité et la première partie de la preuve.

Par conséquent, la condition de compatibilité par paire est vérifiée.

References

- [1] M. Abramowitz et I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*, Volume 55 of Applied Math Series. National Bureau of Standards, 1964.
- [2] G. Alessandrini. Critical points of solutions of elliptic equations in two variables. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 14(2):229–256 (1988).
- [3] G. Alessandrini. Nodal lines of eigenfunctions of the fixed membrane problem in general convex domains. *Comment. Math. Helv.*, 69(1):142–154, 1994.
- [4] A. Ancona, B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof. Nodal domain theorems à la Courant. *Documenta Mathematica*, Vol. 9, p. 283-299 (2004)
- [5] C. Bandle. Isoperimetric inequalities and applications. *Monographs and Studies in Mathematics*, 7, Pitman, 1980.
- [6] P. Bérard. Inégalités isopérimétriques et applications : domaines nodaux des fonctions propres. Exposé XI. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz (1982).
- [7] M. Conti, S. Terracini et G. Verzini. An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues. *Journal of Functional Analysis* 198, p. 160-196 (2003).
- [8] M. Conti, S. Terracini et G. Verzini. A variational problem for the spatial segregation of reaction-diffusion systems. *Indiana Univ. Math. J.* 54 (2005), N3, p. 779-815.
- [9] M. Conti, S. Terracini et G. Verzini. On a class of optimal partition problems related to the Fucik spectrum and to the monotonicity formula. *Calc. Var.* 22, 45–72, 2005.
- [10] M. Dauge et B. Helffer. Eigenvalue variation II. Multidimensional problems. *Journal of differential equations*, Vol.104, n°2, august 1993, p. 263-297.
- [11] R. Diestel. Graph Theory, (second edition). *Graduate Texts in Mathematics*, 173, Springer 2000.

-
- [12] D. Gilbarg et N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. *Springer* 1983.
- [13] M.J. Greenberg et J.R. Harper. *Algebraic topology*, volume 58 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. A first course.
- [14] P. Hartman et A. Wintner. On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations. *Amer. J. Math.*, 75:449–476, 1953.
- [15] B. Helffer, M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof et N. Nadirashvili. Spectral theory for the dihedral group. *GAF*, 12:989–1017, 2002.
- [16] B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof. Converse spectral problems for nodal domains. Extended version. Preprint Sept. 2005, mp_arc 05343.
- [17] B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof. Converse spectral problems for nodal domains. Preprint April 2006. To appear in *Moscow Mathematical Journal*.
- [18] B. Helffer et T. Hoffmann-Ostenhof. On nodal patterns and spectral optimal partitions. Unpublished Notes, December 2005.
- [19] M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, and N. Nadirashvili. The nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in \mathbb{R}^2 can be closed. *Duke Math. Journal*, 90: 631–640, 1997.
- [20] B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof et S. Terracini. Preprint Novembre 2006.
- [21] T. Hoffmann-Ostenhof, P. Michor et N. Nadirashvili. Bounds on the multiplicity of eigenvalues for fixed membranes. *GAF*, 9:1169–1188, 1999.
- [22] T. Kato. Perturbation Theory for Linear Operators. Second edition. *Springer* 1977.
- [23] A. Pleijel. Remarks on Courant’s nodal theorem. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 9: 543–550, 1956.
- [24] M. Reed et B. Simon. Methods of modern mathematical physics IV: Analysis of operators. *Academic Press*, 1978.

-
- [25] B. Simon. Lower semi-continuity of positive quadratic forms. *Proc. Roy. Soc. Edin.* 29, 267-273, 1977.
- [26] B. Simon. A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems. *J. of Funct. Analysis* 28, p. 377-385, 1978.
- [27] P. Stollmann. A convergence theorem for Dirichlet forms with applications to boundary value problems with varying domains. *Math. Z.*, 219: 275–287, 1995.
- [28] J. Weidmann. Continuity of the eigenvalues of self-adjoint operators with respect to the strong operator topology. *Integral Equations Operator Theory* 3 (1980), p. 138-142.
- [29] J. Weidmann. Monotone continuity of the spectral resolution and the eigenvalues. *Proc. R. Soc. Edimb. Sect. A*85,(1980), p. 131-136.
- [30] J. Weidmann. Stetige Abhängigkeit der Eigenwerte und Eigenfunktionen elliptischer Differentialoperatoren vom Gebiet. *Math. Scand.* 54: 51–69, 1984.

B. HELFFER: LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, BAT. 425,
UNIV PARIS-SUD ET CNRS, 91 405 ORSAY CEDEX, FRANCE.

EMAIL: BERNARD.HELFFER@MATH.U-PSUD.FR