Examen session 1, le 21 mai 2007

Durée de l'épreuve : 3 heures. Une rédaction précise et soignée est attendue.

Tous documents et calculatrices sont interdits. Les deux problèmes sont indépendants.

Problème I

Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{u} \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(E_g) \qquad x''(t) + g(x'(t)) + x(t) - \bar{u} = 0.$$

1) Ecrire l'équation différentielle (E_g) sous la forme équivalente d'un système différentiel autonome d'ordre 1 :

$$(S_g) \qquad X'(t) = f(X(t)),$$

où $X(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_2(t) = x_1'(t)$ et f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ que l'on précisera.
Justifier que, pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy associé à (S_g) et à la condition initiale $X(0) = X_0$ définie sur un intervalle ouvert $J(X_0)$. On la note $t \to X(t; X_0)$.

2) Montrer que (S_g) admet un unique point d'équilibre noté U.

3) Calculer la matrice jacobienne de f au point U.
Pour quelles valeurs de $g'(0)$, peut-on affirmer que U est stable ?
Pour quelles valeurs de $g'(0)$, peut-on affirmer que U est instable ?
Pour quelles valeurs de $g'(0)$, peut-on affirmer que U est localement asymptotiquement stable ?
4) Dans cette question, on suppose que g est croissante et $g(0) = 0$.
a) Si $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $V(Y) = (y_1 - \bar{u})^2 + y_2^2$.
Montrer que V est une fonction de Lyapunov pour U et (S_g) sur $\mathbb{R}^2$.
b) Etudier la stabilité de U.
c) Soit $v > 0$. On pose $J((\bar{u}, v)) =]T_*, T^*[$. Montrer que :

$$\|X(t; (\bar{u}, v)) - U\|_2 \leqslant v \text{ pour tout } t \in [0, T^*[\text{ et } T^* = +\infty.$$

d) Etablir que si g est strictement croissante alors U est globalement asymptotiquement stable (on commencera par justifier que $g(y)\,y > 0$ pour tout $y \neq 0$).

5) On suppose que $g(y) = (y-1)^2$ si $y \geqslant 1$ et $g(y) = 0$ sinon.
a) Que sait-on dans ce cas sur la stabilité de U ?

b) Soit $T > 0$ et $t \in [0, T[\mapsto X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ une solution de (S_g) sur $[0, T[$ telle que $x_2(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in [0, T[$. Montrer que $x_1''(t) + x_1(t) = \bar{u}$ pour tout $t \in [0, T[$.

c) Donner toutes les solutions réelles de l'équation différentielle

$$(*) \qquad z''(t) + z(t) = \bar{u}.$$

d) Soit $0 < \varepsilon \leqslant 1$ donné. Expliciter la solution $t \mapsto X(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de (S_g) sur $[0, +\infty[$ qui vérifie $x_1(0) = \bar{u} + \varepsilon, x_2(0) = 0$ et $x_2(t) \leqslant 1$ pour tout $t > 0$.
Le point U est-il asymptotiquement stable ?

6) Dans cette question, on suppose de plus qu'il existe $L > 0$ telle que $\forall s \in \mathbb{R}$, $|g'(s)| \leqslant L$.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $Z_1, Z_2 \in \mathbb{R}^2$ on ait :

$$\|f(Z_1) - f(Z_2)\| \leqslant M \, \|Z_1 - Z_2\| \quad \text{pour une norme sur } \mathbb{R}^2.$$

b) Pour $X_0 \in \mathbb{R}^2$, que peut-on dire sur $J(X_0)$?

c) On suppose de plus que g est impaire et que $\bar{u} = 0$.

Montrer que $X(t; -X_0) = -X(t; X_0)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Problème II

On considère le système différentiel suivant :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = -2\, x(t) - y(t) + 2, \\ y'(t) = x(t)\, y(t). \end{cases}$$

1) Ecrire le système (S) sous la forme d'une équation

$$(E) : \; X'(t) = f(X(t))$$

où $X(t) = (x(t), y(t))$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction que l'on précisera.

2) Déterminer les points d'équilibre de (E) et étudier leur stabilité.

3) Quelles sont les orbites des points $(0, 2)$, $(1, 0)$? Déterminer avec soin l'orbite du point $(0, 0)$. Donner, sans détails, l'orbite du point $(2, 0)$.

4) Dessiner l'ensemble I_0 des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ où le vecteur $f(x, y)$ est horizontal. Représenter sur le même dessin l'ensemble I_∞ des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ où le vecteur $f(x, y)$ est vertical. Indiquer aussi l'orientation des vecteurs.

Pour $X_0 \in \mathbb{R}^2$, on désigne par $X(\cdot; X_0)$ la solution maximale du problème de Cauchy associé à (E) et à la condition initiale $X(0; X_0) = X_0$, elle est définie sur $J(X_0) =]T_*, T*[$.
On considère les régions suivantes :
$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$, $\quad \Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, -2x - y + 2 > 0\}$,
$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, -2x - y + 2 < 0\}$,

$\Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0, y > 0, -2x - y + 2 < 0\}$.
Dans la suite on suppose $X_0 \in \Omega$.

5) Montrer que $X(t; X_0) \in \Omega$ pour tout $t \in J(X_0)$.

6) On suppose $X_0 \in \Omega_1$. Montrer qu'il existe un temps $t_2 > 0, t_2 \in J(X_0)$ et $\varepsilon > 0$ tels que :
– pour tout $t \in [0, t_2[$, on a $X(t; X_0) \in \Omega_1$,
– pour tout $t \in]t_2, t_2 + \varepsilon[$, on a $X(t; X_0) \in \Omega_2$,
– $X(t_2; X_0)$ est sur le segment ouvert du plan $\mathbb{R}^2$ d'extrémités $(0, 2)$ et $(1, 0)$.

7) On suppose $X_0 \in \Omega_2$. On veut montrer qu'il existe un temps $t > 0$ tel que $X(t; X_0) \in \Omega_3$. Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant donc que pour tout $t \in [0, T^*[$ on a $X(t; X_0) \in \Omega_2$.
7-i) Montrer que $\lim\limits_{t \to T^*} x(t)$ existe : on note $\ell_1 \in \mathbb{R}$ cette limite. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $t \in [0, T^*[$ on a $y'(t) \leqslant c\, y(t)$. En déduire que $T^* = +\infty$.

On admet que : puisque $X(t; X_0) \in \Omega_2$ pour tout $t \geqslant 0$, $X(t; X_0)$ ne converge pas vers $(0, 2)$ quand $t \to +\infty$.

7-ii) Conclure (on montrera d'abord, en raisonnant par l'absurde, que $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$ existe dans $\mathbb{R}$).

* * * * * * * * * * *