**Fiche de TD n° 2.**

**Exercice 1** Le B. A. - BA.

Soit $A$ une matrice réelle carrée de taille $n$. On considère l'équation différentielle linéaire $(E)$ $X' = AX$ (sur $\mathbb{R}$). Comme d'habitude on identifie l'espace des vecteurs colonnes à $\mathbb{R}^n$.

1) (une valeur propre relle) Supposons que $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soit solution de $(E)$ et s'écrive $X(t) = \mathrm{e}^{rt}V$, où $r$ est un réel et $V \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne non nul (indépendant de $t$). Que dire de $r$ et $V$ relativement à la matrice $A$ ?

Réciproquement donner des conditions suffisantes sur $A$ permettant d'obtenir une droite de solutions de $(E)$.

2) Supposons que $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soit solution de $(E)$ et s'écrive $X(t) = t\mathrm{e}^{rt}V + \mathrm{e}^{rt}W$, où $r$ est un réel et $V, W \in \mathbb{R}^n$ sont deux vecteurs colonnes non nuls (indépendants de $t$). Que dire de $r$ et $V$ relativement à la matrice $A$ ? Montrer que $(V, W)$ est une suite libre et calculer $AW$ en fonction de $V$ et $W$.

Réciproquement donner des conditions suffisantes sur $A$ permettant d'obtenir un plan de solutions de $(E)$.

Application : on suppose que $V, W$ sont deux vecteurs tels que $AV = 2V$ et $AW = 2W - 3V$. Dterminer la solution $X(t)$ de $X' = AX$ telle que $X(0) = W$.

3) Supposons que $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soit solution de $(E)$ et s'écrive $X(t) = \mathrm{e}^{at}(\cos btV - \sin btW)$, où $a, b$ sont réels ($b \neq 0$), et $V, W \in \mathbb{R}^n$ sont deux vecteurs colonnes non nuls (indépendants de $t$). Que dire de $a + ib$ et $V + iW$ relativement à la matrice $A$ ? Montrer que $(V, W)$ est une suite libre et calculer $AV$ et $AW$ en fonction de $V$ et $W$.

Réciproquement donner des conditions suffisantes sur $A$ permettant d'obtenir un plan de solutions de $(E)$ (ne contenant aucune solution se dplaant sur une droite de $\mathbb{R}^n$)).

4) Supposons que $(V, W)$ est libre et $AV = aV + bW$, $AW = cV + dW$. En discutant suivant le polynôme caractristique de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ donner les solutions au problme de Cauchy $X' = AX$, $X(0) = \alpha_0 V + \beta_0 W$.

**Exercice 2** Equation avec une matrice préservant une droite.

Soit $A(t)$ une matrice réelle carrée de taille $n$ dépendant continûment du paramètre $t \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E)$ $X'(t) = A(t)X(t)$ (où $X(t)$ représente un vecteur colonne à $n$ composantes dépendant de façon $\mathcal{C}^1$ du temps $t$).

a) Dans cette question on suppose que $V$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une fonction continue $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $A(t)V = \lambda(t)V$.

   Montrer que pour toute fonction $t \mapsto x(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le vecteur colonne $X(t) = x(t)V$ est solution de $X' = AX$ ssi $x$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre qu'on précisera. En déduire pour tout vecteur $V_0$ de la droite vectorielle engendrée par $V$ l'unique solution $X(t)$ de $(E)$ (sur $\mathbb{R}$) telle que $X(0) = V_0$ (exprimer $X$ en fonction de $V_0$ et $\lambda$).

b) Application : donner une droite de solutions de $x' = x + (2t - 1)y, y' = 2ty$. Rappeler l'équation vérifiée par le wronskien, le calculer, puis en déduire une base de solutions du système.

c) Supposons qu'il existe une base $(V_1, \ldots, V_n)$ (indépendante de $t$ !) telle que $A(t)$ est diagonalisable dans $\mathcal{B}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donner une base de solutions de $(E)$.

**Exercice 3** Equation avec une matrice nilpotente.

Soit $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On suppose qu'il existe deux vecteurs (colonnes) $U, V$ tels que $U \neq 0, AU = 0, AV = U$.

a) Montrer que $(U, V)$ est une base de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et que $A^2 = 0$.
b) Soit $X(t)$ une solution de $X'(t) = AX(t)$ (sur $\mathbb{R}$). On note $(\alpha(t), \beta(t))$ les coordonnées de $X(t)$ dans la base $(U, V)$ : $X(t) = \alpha(t)U + \beta(t)V$. Quelles sont les équations différentielles satisfaites par $\alpha$ et $\beta$ ? Donner une base de l'espace des solutions de $X' = AX$ (sur $\mathbb{R}$).
c) Application numérique. Résoudre le système

$$\begin{cases} x' &= 2x - 4y \\ y' &= x - 2y \end{cases}$$

Equations scalaires du deuxième ordre.

**Exercice 4** Wronskien.

Soit $(E)$ : $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ une équation différentielle linéaire scalaire homogène du second ordre sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (avec $a, b$ continues sur $I$). Soit $\varphi_1, \varphi_2$ deux solutions de $(E)$. On pose $W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$.

a) Soit $t, t_0 \in I$. Calculer $W'(t)$. Montrer que $W(t) = W(t_0)\ \exp(-\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s)$. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2)$ est une base de solution de $(E)$ ssi il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

   Application. On étudie l'équation $(E)$ : $2t^2x'' + 3tx' - x = 0$ sur $I = \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\varphi_1(t) = \sqrt{t}$ et $\varphi_2(t) = \frac{1}{t}$ sont solutions. Calculer $W(t)$. Quelle est la limite de $W$ en 0 ? Déterminer la solution $x$ telle que $x(1) = 2, x'(1) = 1$.
b) On suppose dans cette question que $\varphi_1$ ne s'annule pas sur $I$. Pour $\varphi_2$ une autre solution, exprimer $(\frac{\varphi_2}{\varphi_1})'(t)$ en fonction de $W(t)$ et $\varphi_1$.

   Application. On étudie l'équation $(E)$ : $t^2x'' - (t^2 + 3t)x' + (t + 3)x = 0$ sur $I = \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\varphi_1(t) = t$ est solution. Soit $\varphi_2$ une autre solution. Etablir que $W(t) = W(1).\exp(\int_1^t \frac{3+s}{s}\mathrm{d}s)$ et calculer explicitement $W(t)$. En déduire une solution $\varphi_2$ indépendante de $\varphi_1$. Déterminez l'unique solution $x$ telle que $x(1) = 1, x'(1) = 0$.

**Exercice 5** Equation différentielle linéaire scalaire du 2ème ordre à coefficients constants.

Soient $a, b$ des réels quelconques. On considère l'équation différentielle linéaire homogène $(E)$ : $x'' + ax' + bx = 0$. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des solutions de $E$ (sur $\mathbb{R}$).

a) Montrer que l'application $x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ identifie $\mathcal{S}(E)$ avec l'ensemble des solutions de $X' = AX$, où $A$ est une matrice $2 \times 2$ qu'on déterminera. Rappeler pourquoi $\mathcal{S}(E)$ est un plan vectoriel.
b) Montrer que le polynôme caractéristique de $A$ est $P(X) = X^2 + aX + b$.
c) Lorsque $P$ a deux racines réelles distinctes $r_1, r_2$, montrer qu'une base de $\mathcal{S}(E)$ est $t \mapsto \mathrm{e}^{r_1 t}, t \mapsto \mathrm{e}^{r_2 t}$.
d) Lorsque $P$ a deux racines complexes conjuguées $r + i\varphi, r - i\varphi$, montrer qu'une base de $\mathcal{S}(E)$ est $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}\cos(\varphi t), t \mapsto \mathrm{e}^{rt}\sin(\varphi t)$.
e) Lorsque $P$ a une racine double $r$, montrer qu'une base de $\mathcal{S}(E)$ est $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}, t \mapsto t\mathrm{e}^{rt}$.
f) Pour $\omega \in \mathbb{R}^*$, quelles sont les solutions (sur $\mathbb{R}$) de $x'' + \omega^2 x = 0$ ? de $x'' - \omega^2 x = 0$ ? En déduire, lorsque $A \in \mathfrak{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ est une matrice carrée telle qu'il existe deux vecteurs $U, V \in \mathfrak{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ linéairement indépendants satisfaisant $AU = V, AV = -\rho^2 U$ ($\rho \in \mathbb{R}^*$), une expression simple de la solution de $X' = AX$ telle que $X(0) = \alpha U + \beta V$.

Application. Résoudre $x'' - 3x' + 2x = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{-t}}$. On cherchera une solution particulière sous la forme $x(t) = a(t)e_1(t) + b(t)e_2(t)$, où $e_1, e_2$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation linéaire homogène associée, de sorte que $a, b$ vérifient sur $\mathbb{R}$ la relation $a'e_1 + b'e_2 = 0$ (méthode dite de "variation de la constante").

[on trouve $x(t) = \mathrm{e}^t(\frac{2}{3}(1 + \mathrm{e}^{-t})^{\frac{3}{2}} + a) + \mathrm{e}^{2t}(\frac{2}{3}(1 + \mathrm{e}^{-t})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}(1 + \mathrm{e}^{-t})^{\frac{5}{2}} + b)$]